Aspects énergétiques

Chapitre 17

allal Mahdade

Groupe scolaire La Sagesse Lycée qualifiante

17 avril 2017

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Introduction

Lors du saut à la perche , l'athlète réussit son saut grâce à la maîtrise de sa vitesse et l'élasticité de la perche .

Quelle sont les formes d'énergie mises en oeuvre lors de ce saut ?

De ce fait le système (athlète + perche) acquiert de l'énergie sous différentes formes . Quelles sont ces formes d'énergie ?

I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

1. Travail d'une force constante

Rappel

Le travail W d'une force constante $\overrightarrow{F}$, dont le point d'application se déplace du point A jusqu'au point B , est défini par la relation :

$$\boxed{W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} = F.l.cos(\alpha)}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente le vecteur de déplacement de longueur $l = AB$ du point d'application de la force exprimée en mètre (m) .

$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{F},\overrightarrow{AB}})$, la valeur de F exprimée en newton (N) et le travail W exprimé en joule (J) .

I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

☞ Le travail d'une force constante ne dépend pas de la trajectoire suivie par son point d'application , il ne dépend que de la position initiale et finale .
Cette expression n'étant utilisable que dans le cas d'une force constante . **Comment peut-on calculer le travail d'une force variable ?**

2.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort tendu .

a. Notion du travail élémentaire .

Si la force n'est pas constante , l'expression précédente n'est plus valable . Pour cela on décompose la trajectoire du point d'application de la force en segment élémentaire $\overrightarrow{\delta l}$ appelé **vecteur déplacement élémentaire**. Sur chaque déplacement élémentaire on peut considérer que la force est constante et on applique la relation précédente , en considérant le travail élémentaire est :

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\delta l}}$$

I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

Le travail globale lors du déplacement AB tel que

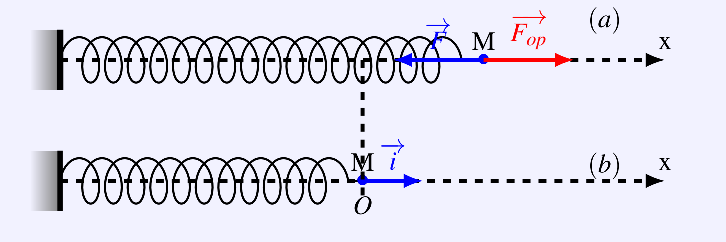
$$\overrightarrow{AB} = \sum_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{\delta l} = \sum_{A}^{B} \overrightarrow{\delta l}$$

est :

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \sum_{A}^{B} \delta W = \sum_{A}^{B} \overrightarrow{F} . \overrightarrow{\delta l}}$$

b. Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort :

On considère un ressort horizontal à spire non jointives et de masse négligeable , l'une des extrémité du ressort est fixée à un support .
Un opérateur applique au ressort , sur son extrémité libre M une force $\overrightarrow{F_{op}}$, le ressort s'allonge et le point M se déplace de $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{i}$.



I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

D'après la troisième loi de Newton , le ressort exerce sur l'opérateur une force $\overrightarrow{F}$ opposée à $\overrightarrow{F_{op}}$: c'est une force de rappel telle que $\overrightarrow{F} = -k.x\,\overrightarrow{i} = -\overrightarrow{F_{op}}$, donc :

$$\overrightarrow{F_{op}} = k.x.\,\overrightarrow{i}$$

La force $\overrightarrow{F_{op}}$ dépend de x , donc elle est variable .
Le travail de la force $\overrightarrow{F_{op}}$ lorsque son extrémité libre se déplace d'un point $A(x_A)$ à un point $B(x_B)$

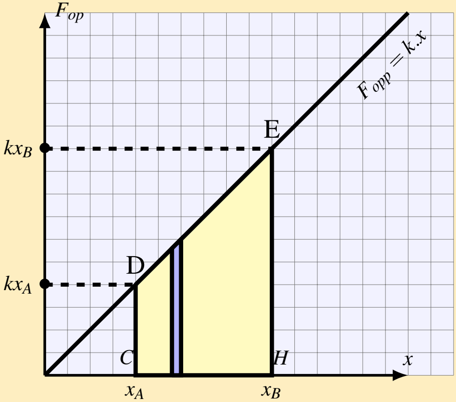
$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \sum_A^B \overrightarrow{F_{op}}.\overrightarrow{\delta l} = \sum_A^B k.x.\delta x.\,\overrightarrow{i}$$

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \sum_A^B k.x.\delta x} \qquad (1)$$

I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

Pour calculer le travail de la force , on peut utiliser deux méthodes ; méthode géométrique et méthode analytique .

☞ **Méthode géométrique :**



I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

D'après le graphe de $F_{op} = k.x$, on constate que le travail élémentaire $\delta W(\overrightarrow{F_{op}}) = k.x.\delta l$ correspond à l'aire du rectangle bleu . La somme des aires des rectangles élémentaires est égale à l'aire algébrique du trapèze jaune CDEH .

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = h.\frac{\text{petit base} + \text{grande base}}{2}$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{(x_B - x_A)(k.x_B + k.x_A)}{2}$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

☞ **Méthode analytique :**

$\mathscr{A}$ représente l'aire sous la courbe de la fonction $y = k.x$ entre les abscisses x_A et x_B .

On remplace dans l'expression (1) la sommation par l'intégral qui est une somme continue et δx par dx , on aura :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \int_{x_A}^{x_B} k.x.dx = \left[\frac{1}{2}k.x^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

I.Travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort .

Le travail de la force appliquée par un opérateur à l'extrémité libre d'un ressort lors d'un déplacement de cette extrémité d'un abscisse x_A à un abscisse x_B est :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

Puisque $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F_{op}}$ alors le travail de la force exercée par le ressort sur l'opérateur est

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

Le travail de la force de rappel exercée par un ressort dépend des positions initiale et finale de l'extrémité libre du ressort.

II.Énergie potentielle élastique.

1.Définition

Un ressort allongé ou comprimé , un élastique tendu, une perche courbée possèdent une énergie emmagasinée dues à leur déformation . Cette énergie leur a été communiquée par l'opérateur qui a provoqué leur déformation . Elle est restituée lorsque ces corps élastiques reprennent leur forme initiale . Cette énergie emmagasinée est appelée **énergie potentielle élastique** .

II.Énergie potentielle élastique.

2. Expression de l'énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'un système (solide + ressort) horizontal est l'énergie que possède ce système lorsque le ressort est déformé :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

C : est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle élastique .
$x = \Delta l$ est l'allongement du ressort en mètre

II.Énergie potentielle élastique.

☞ Dans le cas où on choisit $E_{pe} = 0$ nulle pour $x = 0$ alors :

$$C = 0$$

Donc l'énergie potentielle élastique :

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2}$$

où $\Delta l = x$ pour un ressort horizontal

II.Énergie potentielle élastique.

D'après les calculs faites , nous avons :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = -{}_A^B\Delta E_{pe}$$

$${}_A^B\Delta E_{pe} = -W_{AB}(\overrightarrow{F})$$

III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.

1. Énergie cinétique du système

définition

Un corps solide indéformable , de masse m et de vitesse v par rapport à un repère donné possède une énergie cinétique E_c de translation tel que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

E_c est exprimée en joule (J) .

Pour l'oscillateur élastique , son énergie cinétique est l'énergie cinétique du solide

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

2. Énergie mécanique du système

Par définition ; dans un repère donné , l'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle .

$$E_m = E_c + E_p$$

III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.

Pour un oscillateur élastique horizontal l'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle élastique et l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = E_{pp} + E_{pe}$
Si on choisit l'état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$ coïncide avec le plan horizontal qui passe par G contenant l'origine de l'axe Oz orienté vers le haut ; on a dans ce cas :

$$E_p = E_{pe}$$

Donc

$$E_m = E_c + E_{pe}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + c$$

III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.

a. Cas de frottement négligeable :

* L'amplitude des oscillations est constante , le régime est périodique de période propre T_0.

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + c$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k.x.\dot{x}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}(\ddot{x} + \frac{k}{m}x) = 0$$

car d'après l'étude dynamique , nous avons : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Donc $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + c = Cte$, **l'énergie mécanique se conserve** .

* La représentation graphique de E_c et E_{pe} en fonction du temps t :

● $E_{pe} = \frac{1}{2}k.x^2$ et puisque $x = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kX_m^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{4}kX_m^2\left[cos\left(\frac{4\pi}{T_0}.t\right) + 1\right]}$$

La période de $E_p(t)$ est $\frac{T_0}{2}$.

- $E_c = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2$ avec $\dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0}X_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$ donc :

$$E_c = \frac{1}{2}m.\frac{4\pi^2}{T}.X_m^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

$$E_c = \frac{1}{4}m.\frac{4\pi^2}{T}.X_m^2\left[1 - cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)\right]$$

On sait que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ donc $\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{k}{m}$

D'où :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{4}k.X_m^2\left[1 - cos\left(\frac{4\pi}{T_0}.t\right)\right]}$$

III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.

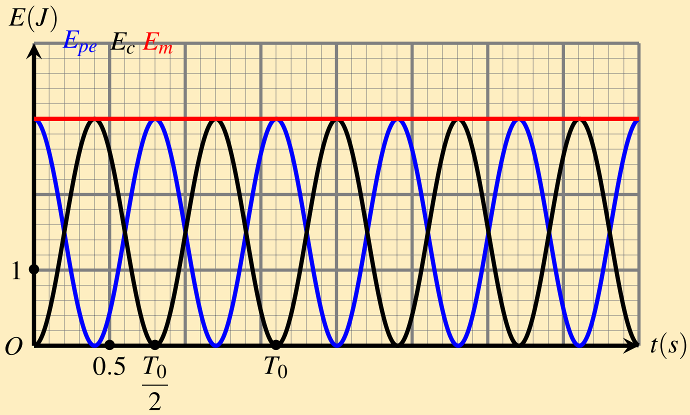
● L'énergie mécanique est la somme de E_c et E_{pe} , c'est à dire :

$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) + \frac{1}{2}k.X_m^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_m^2}$$

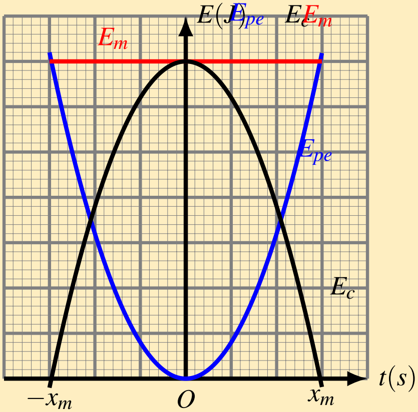
D'après cette relation on a : $\boxed{\dot{x}_m = v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}.X_m}$

III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.



III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.

* Représentation de E_c,E_{pe} et E_m en fonction de x :

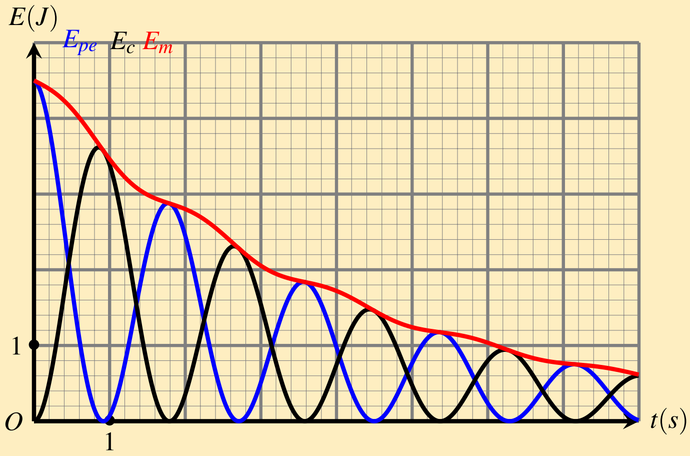


III. Étude énergétique d'un système (solide-ressort) horizontal.

b. Cas de frottement non négligeable .

Dans ce cas l'amplitude des oscillations décroît avec le temps , le régime est pseudo-périodique de période T . L'énergie mécanique du système diminue au cours du temps . **Elle est dissipé par transfert thermique** .

II.Énergie potentielle élastique.



IV. Étude énergétique du pendule de torsion

1. Énergie cinétique du système oscillant

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense . Soit J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la tige à instant t . On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de Δ, à cet instant t par l'expression suivante :

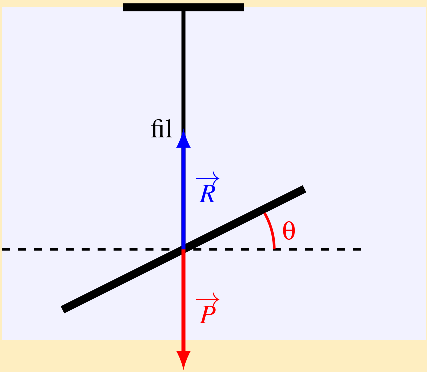
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2}$$

2. Énergie potentielle de torsion du système oscillant :

On considère un pendule de torsion de constante de torsion C effectuant des oscillations libres et non amorties . Au cours du mouvement oscillatoire , la tige est soumise à son poids $\overrightarrow{P}$, à la force $\overrightarrow{R}$ exercée par le fil métallique sur la tige et au couple de torsion appliqué par le fil . On applique le théorème d'énergie cinétique au système oscillant entre deux positions $\theta_1(t_1)$ et $\theta_2(t_2)$

$$W(\overrightarrow{P})+W(\overrightarrow{R})+W_c=E_{c_2}-E_{c_1}$$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.



IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

Comme $W(\overrightarrow{P}) = 0$ et $W(\overrightarrow{R}) = 0$, donc $W_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_1^2$ W_c est le travail du couple de torsion entre les deux positions d'abscisses angulaires $\theta_1(t_1)$ et $\theta_2(t_2)$

Avec

$$\theta_1(t_1) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1 + \varphi\right)$$

et

$$\theta_2(t_2) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2 + \varphi\right)$$

et

$$\dot{\theta_1} = -\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}\theta_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1 + \varphi\right)$$

et

$$\dot{\theta_2} = -\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}\theta_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2 + \varphi\right)$$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

Si on remplace $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ par leur expression respectivement , nous avons :

$$W_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_2^{\,2} - \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_1^{\,2}$$

$$W_c = \frac{1}{2}J_\Delta\left[\frac{C}{J_\Delta}\theta_m^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2+\varphi\right)\right] - \left[\frac{1}{2}J_\Delta\frac{C}{J_\Delta}\theta_m^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1+\varphi\right)\right]$$

$$W_c = \frac{1}{2}C\left[\theta_m^2\left(1-cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2+\varphi\right)\right)-\theta_m^2\left(1-cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1+\varphi\right)\right)\right]$$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

$$W_c = \frac{1}{2}C\theta_m^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1+\varphi\right) - \frac{1}{2}C\theta_m^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2+\varphi\right)$$

$$\boxed{W_c = \frac{1}{2}C\theta_1^2 - \frac{1}{2}C\theta_2^2}$$

Le travail du couple de torsion entre ces deux position est égale à la diminution d'une forme d'énergie on la note E_{pt} appelée **énergie potentielle de torsion** .

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par la relation :

$$\boxed{E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte}$$

Avec C la constante de la torsion du pendule , θ angle de torsion en rad et Cte une constante qui dépend du choix de l'état de référence fourni par les conditions initiales .

En générale , on prend $E_{pt} = 0$ pour $\theta = \theta_0 = 0$; soit Cte=0 d'où

$$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

3. Énergie mécanique du système oscillant

On définit l'énergie mécanique d'un pendule de torsion par la relation suivante :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte}$$

Dans le cas où $Cte = 0$ on a alors :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2}$$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

a. Cas de frottement négligeable :

Si on dérive cette expression par rapport au temps , on aura :

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \theta \right)$$

D'après l'équation différentielle d'un pendule de torsion libre non amorti : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ et par conséquent : $\frac{dE_m}{dt} = 0$, soit $E_m = Cte$, l'énergie mécanique se conserve .

L'énergie mécanique d'un pendule de torsion libre et amorti se conserve : $E_m \frac{1}{2} C\theta_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^2 = Cte$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

*** Diagramme d'énergie d'un pendule de torsion :**

Lorsque la tige passe par sa position d'équilibre : $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$ soit $E_{pt} = 0$ et $E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$

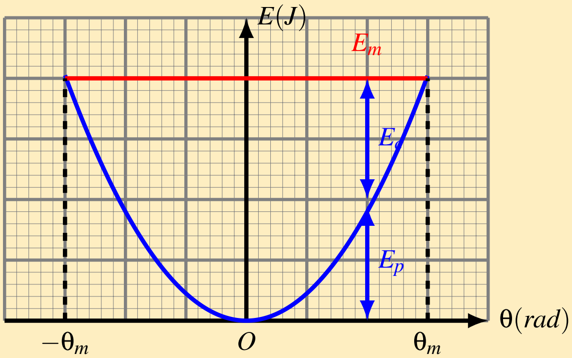
Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes : $\theta = \pm\theta_m$ et $\dot{\theta} = 0$

$E_{pt} = \dfrac{1}{2}C\theta_m^2$ et $E_c = 0$

IV. Étude énergétique du pendule de torsion.

a. Cas de frottement non négligeable :

L'énergie mécanique du système oscillant décroît au cours du temps , elle est dissipée par effet thermique .



V. Étude énergétique d'un pendule pesant.

1. Énergie cinétique d'un pendule pesant

L'énergie cinétique d'un pendule pesant effectuant un mouvement oscillatoire est définie par la relation :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2} \tag{1}$$

Avec J_Δ est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe Δ exprimé en $kg.m^2$; $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du pendule en rad/s et E_c est l'énergie cinétique en joule (J) .

V. Étude énergétique d'un pendule pesant.

2. Énergie potentielle de pesanteur du système oscillant

L'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule pesant est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{E_{pp} = mgz + Cte} \qquad (2)$$

Avec m la masse du système en (kg), g intensité de pesanteur en (m/s^2), z la côte du centre d'inertie G du système sur l'axe $O, \overrightarrow{k}$ d'un repère orthonormé $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orienté vers le haut .
Cte une constante qui dépend de l'état de référence choisi où l'énergie potentielle est nulle ($E_{pp} = 0$ et $z = z_{ref}$

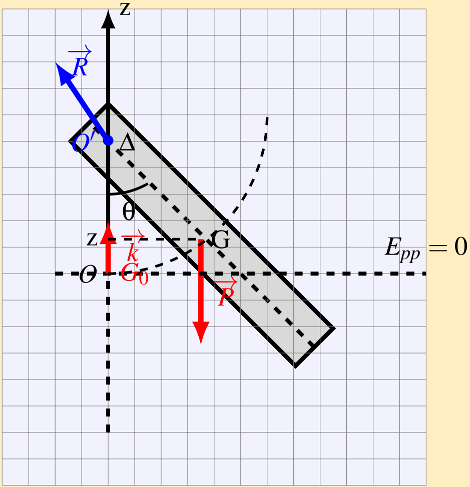
3. Énergie mécanique du système oscillant :

L'expression de l'énergie mécanique d'un pendule pesant dans un référentielle terrestre est :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mgz + Cte} \qquad (3)$$

Exemple : Pour le pendule pesant de la figure ci-contre , l'énergie potentielle de pesanteur : on a $E_{pp} = 0$, $z_{ref} = 0$ donc $E_{pp} = mgz$ avec $-z_m \leqslant z \leqslant +z_m$.

V. Étude énergétique d'un pendule pesant.



V. Étude énergétique d'un pendule pesant.

L'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ est :
$E_{pp} = mgd(1 - cos\theta$ avec $d = OG$.

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mgd(1 - cos\theta} \quad (4)$$

En absence de frottement , l'énergie mécanique d'un pendule pesant , libre et amorti, se conserve .

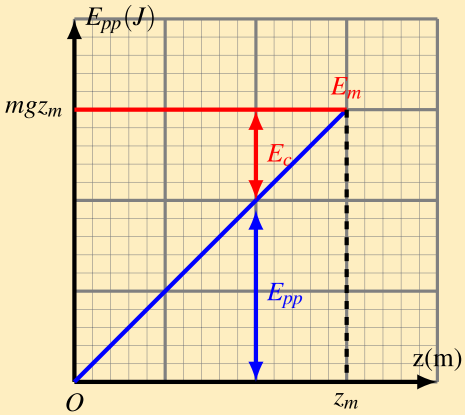
4. Diagramme des énergies

Diagramme des énergies en fonction de z : (en absence de frottement)
* $E_{pp} = mgz$ avec $0 \leqslant z \leqslant +z_m$
* l'énergie mécanique : pour $0 \leqslant z \leqslant z_m$ on a $E_m = E_c + mgz$ lorsque $z = z_m$ on a $E_m = mgz_m$

lorsqu'il passe par la position d'équilibre on a $z = 0$ et $E_m = E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$
* $E_c = E_m - E_{pp}$

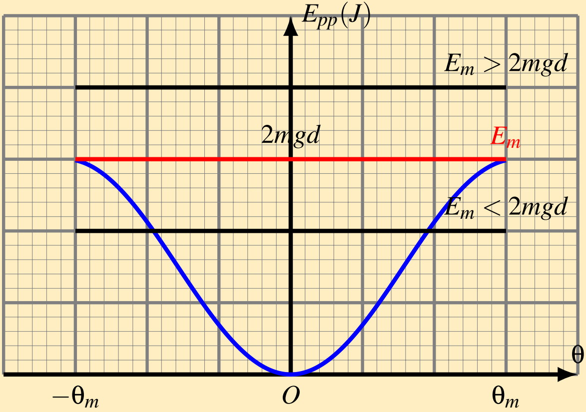
E_m est constante et il y a une échange d'énergie au cours des oscillations , soit $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$

V. Étude énergétique d'un pendule pesant.



V. Étude énergétique d'un pendule pesant.

Diagramme des énergies en fonction de θ



* L'expression de l'énergie potentielle en fonction de θ est :
$E_{pp} = mgd(1 - cos\theta)$ avec $-\theta_m \leqslant \theta \leqslant \theta_m$.
Cas 1 : $E_m > 2mgd \Longrightarrow E_c = E_m - E_{pp} > 0$ le pendule ne s'arrête pas et il tourne autour de l'axe (Δ) .
Cas 2 : $E_m < 2mgd \Longrightarrow E_c = E_m - E_{pp} < 0$ et puisque E_c ne peut pas être négative alors dans ce cas $E_c \geqslant 0$ alors pour $E_c = 0$ l'élongation $\theta = \theta_m$ ou $\theta = -\theta_m$ et le pendule pesant a un mouvement oscillatoire libre et amorti

V. Étude énergétique d'un pendule pesant.

* Pour des faibles élongations on peut considérer en première approximation que $1 - cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$, c'est à dire que $E_{pp} = \frac{1}{2}mgd\theta^2$ et la représentation graphique de E_{pp} en fonction de θ est une courbe parabolique .