Systèmes mécaniques oscillants : exercices

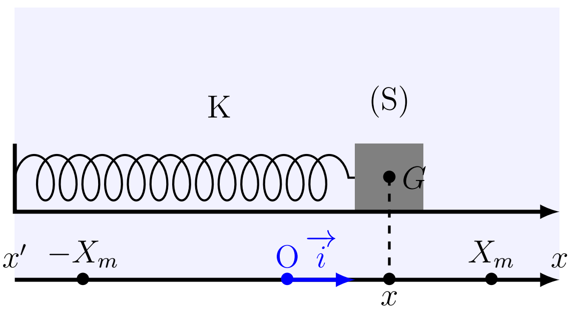
Exercice 1 :

1. Définir les notions suivantes :
   Oscillateur mécanique - mouvement oscillatoire - oscillation libre - amplitude de mouvement - élongation du mouvement - période propre - amortissement des oscillations mécaniques - oscillations forcées - oscillations entretenues - pendule élastique - pendule pesant - pendule simple - pendule de torsion .
2. Choisir la bonne réponse :
   (a) Plus la raideur d'un ressort est grande , plus la période du pendule élastique horizontal est :
   (a) grande (b) petite
   (b) La formule de la période des oscillations du pendule élastique horizontal n'est valable que pour des petites élongations :
   (a) vrai (b) faux
   (c) En présence de frottements , l'amplitude d'un pendule de torsion :
   (a) croit (b) décroît (c) reste constante
   (d) Plus la longueur du fil d'un pendule simple est grande , plus sa période est :
   (a) courte (b) longue
   (e) Plus la constante de torsion est grande , plus la période du pendule de torsion est :
   (a) grande (b) petite

Pendule élastique

Exercice 2 : résolution analytique de E.D

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N/m$ associé à un solide de masse $m = 250g$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe $(O, \vec{i})$, avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au déplacement du solide.
On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = x(t)$.

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$$

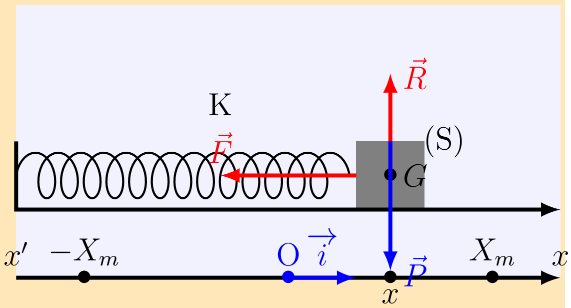
2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

   (a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
   (b) Déterminer les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.
   (c) Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .
   (d) Déterminer les caractéristiques de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
   * lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
   * lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

Solution : exercice 2

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :
Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;
Système étudié : le solide (S) ;
Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$, la réaction du plan horizontal $\vec{R}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\vec{\Delta l}$;



On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

On projette la relation sur $x'Ox$:

$$0 + 0 - K.\Delta l = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0}$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

2.1 L'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique :
x(t) solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois x(t) par rapport au temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2}x(t)$$

Pour que x(t) soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Application numérique : $T_0 \approx 1s$

2.2 On détermine les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :

D'après les données de l'exercice on $X_m = 2.10^{-2}m$

En considérant les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ on a $x(0) = 0$ passe par la position d'équilibre et $v(0) > 0$;

$X_m cos\varphi = 0$ donc $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

et puisque la vitesse à t=0 est positive : $-X_m\frac{2\pi}{T_0}sin\left(\varphi\right) > 0$ c'est à dire que $sin\varphi < 0$, d'où

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

donc la solution de E.D est :

$$\boxed{x(t) = 2 \times 10^{-2}cos\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :

La vitesse des oscillations : $v(t) = -4 \times 10^{-2}\pi sin\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$

Cette vitesse est maximale lorsque $sin\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ i.e que $v_{max} = 4 \times 10^{-2}\pi$

2.4 Les caractéristiques de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement $F(t) = K.x(t)$

* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;

nous avons $x(t) = 0$ donc $Ft) = 0$

* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

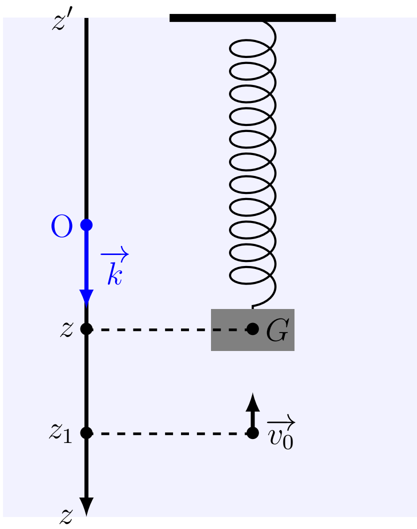
Pour $x = X_m$ nous avons $\vec{F} = K.X_m\vec{i}$ l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que $\vec{i}$.

Pour $x = -X_m$ nous avons $\vec{F} = -K.X_m\vec{i}$ l'intesité est maximale et dans le sens opposé de $\vec{i}$

Exercice 3 : Pendule élastique vertical

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N/m$ associé à un solide de masse $m = 300g$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $z_1 = 2cm$ et à l'instant t=0 (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale $v_0 = 0.3m/s$ dans le sens négatif de l'axe $(O, \overrightarrow{k})$ orienté vers le bas et avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = z(t)$.



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}.z = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Z_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

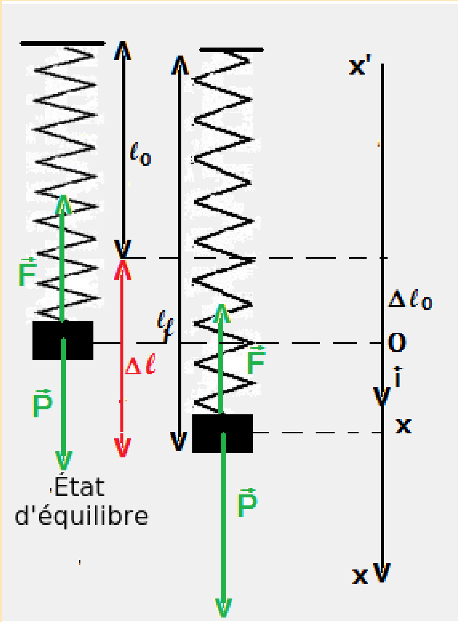
   (a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .

   (b) Déterminer les paramètres Z_m et φ .

3. Étudions le cas où on lance le système à t=0 , à partir de l'état d'équilibre stable , dans le sens positive avec une vitesse $v_0 = 0,3m/s$. Déterminer les paramètres Z_m et φ .

Solution : exercice 3

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :
Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;
Système étudié : le solide (S) ;
Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\vec{\Delta l}$;
Étude du système à l'état d'équilibre :



$$\vec{P} + \vec{F} = -K.\vec{\Delta l_0} = \vec{0}$$

On projette sur $z'Oz$, on aura :

$$m.g - K.\Delta l_0 = 0 \qquad (1)$$

À l'instant t on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a_z}$$

$$mg - K.\Delta l = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$ Donc :

$$mg - K.\Delta l_0 - K.z = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

et d'après l'état d'équilibre on a $m.g - K.\Delta l_0 = 0$, I.e que E.D sera :

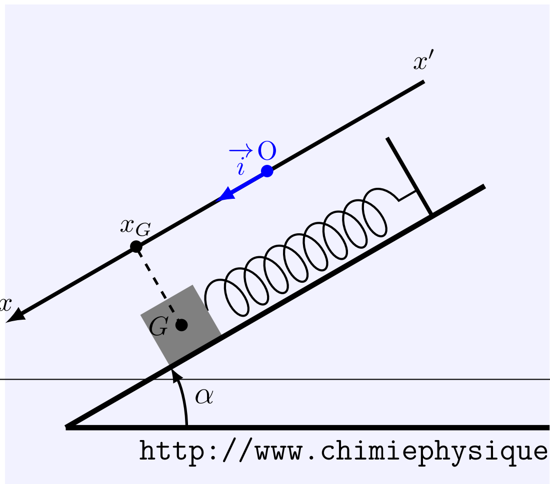
$$-K.x = m.\frac{d^2z}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{m}.z = 0}$$

2.

Exercice 4 : Pendule élastique incliné

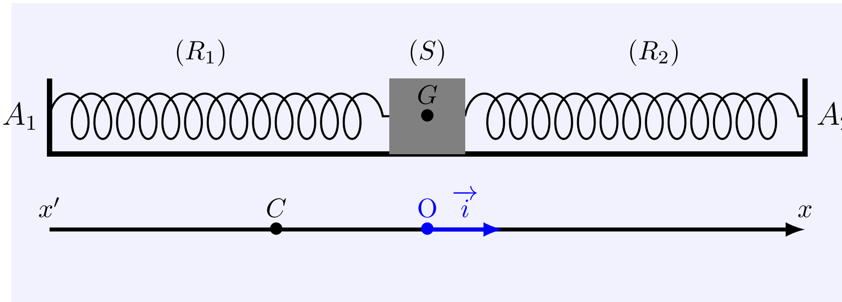
Un ressort de masse négligeable , à spires non jointives, parfaitement élastique n est accroché par l'une des extrémités à un support fixe et l'autre extrémité , on accroche un solide de masse $m = 500g$. L'ensemble est situé sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Les frottements sont négligé dans tout l'exercice .



1. Le ressort de longueur $l_0 = 20cm$ au repos , à l'équilibre la longueur du ressort est $l = 25cm$. En déduire la valeur de la constante du raideur K du ressort . On prend $g = 10m/s^2$
2. On écarte le solide vers le bas , de sa position d'équilibre à t=0 d'une distance de $d = 3cm$ et on le lâche sans vitesse initiale . Par une étude dynamique trouver l'équation horaire du mouvement .
3. La période des oscillations dépend-t-elle de l'angle α ?

Exercice 5 : Association de deux ressorts

On place un cavalier de masse $M = 700g$ sur un rail à coussin d'air horizontal et on le fixe aux extrémités de deux ressorts semblables R_1 et R_2 de mêmes constantes de raideur $K_1 = K_2 = 20N/m$. La longueur initiale de chaque ressort est $l_{01} = l_{02} = 18cm$ et à l'équilibre , ils ont même allongement $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2cm$.

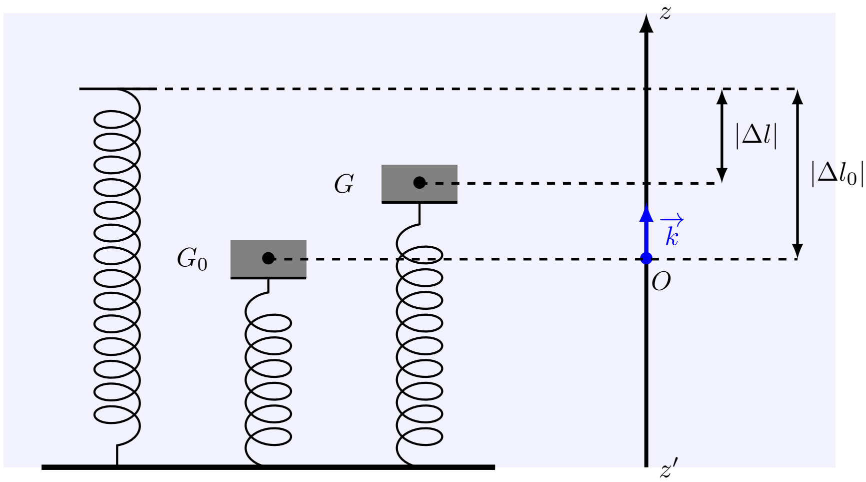


1. On écarte le cavalier de sa position d'équilibre de distance $OC = 2cm$ de sens vers A_1 et de direction de A_1A_2, puis on l'abandonne sans vitesse initiale , à l'instant t=0 .
   (a) Déterminer, À un instant t , les expressions des allongements de Δl_1 et Δl_2 pour chaque ressort en fonction de x l'abscisse de G
   (b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de G .
   (c) La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :
   $$x't) = X_m cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$
   avec ω_0 est la pulsation propre du mouvement de G , $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Donner l'expression de ω_0 et T_0 . Déterminer φ et X_m
2. On fixe au cavalier une petite plaque de masse négligeable puis on l'immerge dans un liquide . Sachant que la force de frottement appliquée par le liquide sur la plaque au cours du mouvement du cavalier est de la forme $\vec{f}) - \alpha.\vec{v}$ où α est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G peut s'écrire sous la forme suivante :
   $$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2K}{m}x = 0$$
3. Donner la forme des courbes qui représentent l'élongation x(t) du centre d'inertie G lorsque les frottement deviennent de plus en plus importants . (on prend les mêmes conditions initiales)

Exercice 6 :La suspension : les amortisseurs

La suspension d'une automobile se compose , au niveau de chaque roue , d'un ressort et d'un amortisseur (généralement à l'huile)

On modélise l'automobile par un solide de masse M de centre d'inertie G ; les ressorts par un seul ressort vertical , à spire non jointive, de masse négligeable et d'une constante de raideur K . Le système (ressort+solide) est représenté dans la figure ci-dessous :



Le repérage des positions z du centre d'inertie G du solide se fait selon un axe Oz orienté vers le haut ; l-origine O est choisie à la position d'équilibre G_0 du centre d'inertie du solide .

I. Étude du système à l'état d'équilibre .
Pour la vérification de la valeur de la constante du raideur de ressort , on mesure la longueur initiale du ressort l_0, puis on place le solide (S) de masse $M = 100g$ sur le plateau de masse négligeable, fixé à l'extrémité libre du ressort . Ce dernier sera compressé de Δl_0 et sa longueur finale à l'équilibre $l = 7,6cm$.

1. Calculer la constante de raideur K du ressort .
2. Calculer l'erreur relative qui peut se commettre au cours de cette mesure par l'opérateur sur la constante de raideur du ressort . la valeur de K indiquée par le fabriquant est $K = 40N/m$. On donne la formule de l'erreur relative :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X_{ex} - X_{th}}{X_{th}}$$

II. Étude dynamique :
On écarte le système (ressort + solide) de sa position d'équilibre vers le bas de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale . Le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre G_0 .

1. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$\ddot{z} + \frac{K}{M}z = 0$$

2. Écrire la solution $z(t)$ de cette équation différentielle en fonction de f_0 la fréquence propre des oscillations , z_m et le temps t . En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$

3. En utilisant les expressions de $v(t)$ et $z(t)$, montrer que :

$$v = 2\pi f_0 \sqrt{z_m^2 - z^2}$$

$$tan\Phi = -\frac{v}{2\pi f_0 z}$$

avec Φ est le déphasage de z(t) à l'instant t .

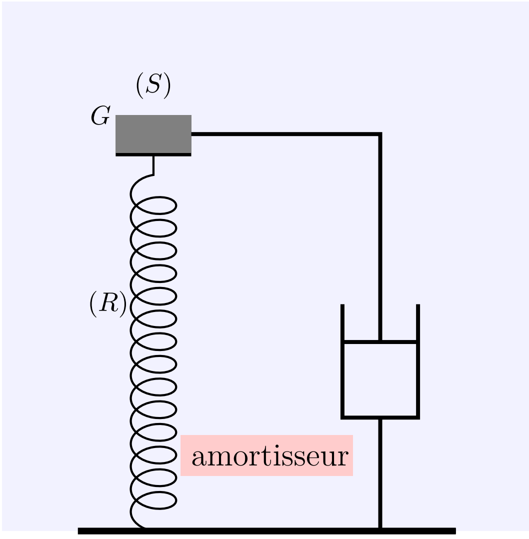
4. Calculer v la vitesse de G et Φ la phase du mouvement à l'instant $t = 2s$

II. Étude des oscillations forcées

Pour modéliser l'amortissement, on ajoute au dispositif précédent un amortisseur qui engendre une force de frottement fluide de sens opposé au vecteur vitesse du mouvement de G et proportionnelle à sa valeur tel que :

$$\overrightarrow{f} = -\alpha \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{k}$$

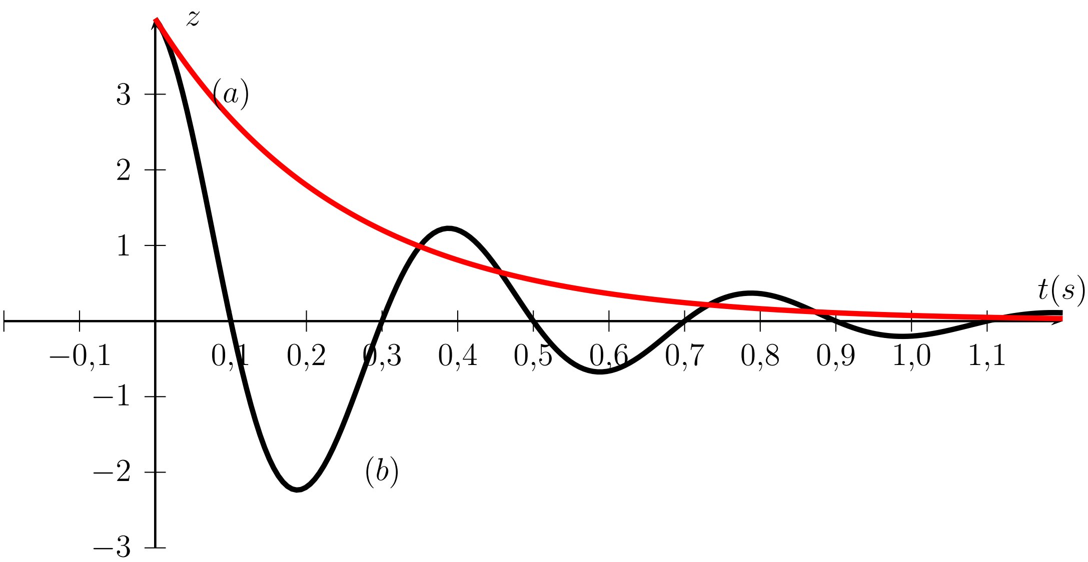
où α est une constante positive qui dépend de la qualité des amortisseurs appelée le coefficient d'amortissement .



1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + K.z = 0$$

2. Pour ce système mécanique , identifier l'excitateur et le résonateur .
3. On considère deux automobiles (A_1) et (A_2), assimilables chacune à un solide de même masse M reposant sur le ressort (R) vertical . On représente les courbes z(t) des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors de passage sur une bosse .



a. Donner les noms des régimes associés aux deux courbes .

b. L'une des courbes présente une pseudo-période . Déterminer graphiquement sa valeur .

c. Les allures différentes des courbes sont dues au coefficient d'amortissement α. Quelle courbe correspond à la plus grande valeur de α ? Justifier la réponse .

d. Quelle automobile possède la meilleure suspension ?

Pendule de torsion

Exercice 1

Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique vertical , fixé à l'une des extrémités un disque horizontal , homogène de masse $M = 5,60kg$ et de diamètre $d = 24cm$. L'autre extrémité du fil est étant fixé à un support . Le système (disque+fil) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) matérialisé par le fil métallique .
Lorsque on applique une force d'intensité $4,23N$ et de direction tangente à la gante du disque , ce dernier tourne d'un angle $\theta = 3,34°$ de sa position d'équilibre stable . Puis on enlève cette force et on lâche le système sans vitesse initiale .

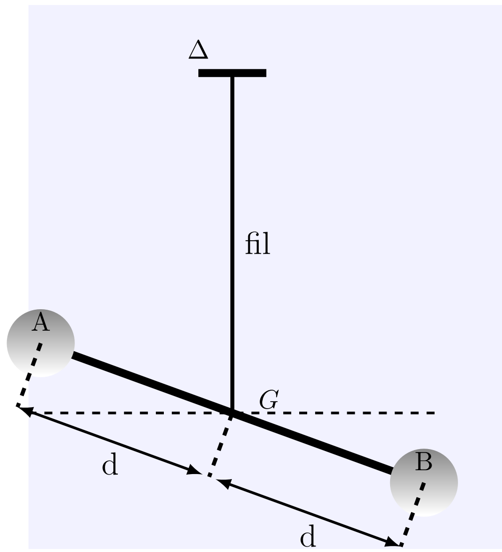
1. Calculer la constante de torsion C du fil métallique
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique , Établir l'équation différentielle du mouvement du système .
3. La solution de l'équation différentielle s'écrit de la forme suivante :

$$\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$$

   Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations et la fréquence f_0 et les calculer.
4. Écrire l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$. Quelle est la nature de ce mouvement ?

Exercice 2

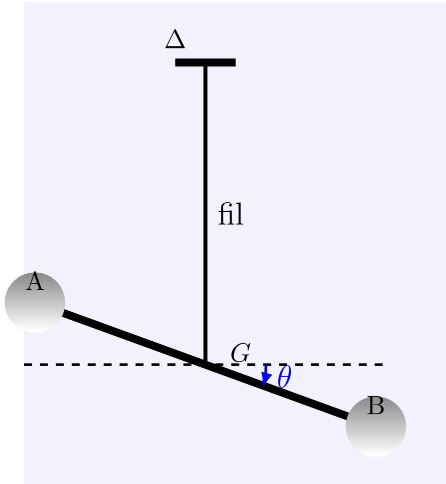
Une barre horizontale AB est supportée par un fil vertical dont une des extrémité est fixée au centre de gravité G de AB , et , l'autre extrémité est attachée à un point fixe O . Deux masse ponctuelles de 100 g chacune sont placées sur l'axe AB de la barre , l'une sur GA et l'autre sur GB. On pose $GA = GB = d$
En absence des masse m , la période vaut 4s ; lorsque les masse sont placées de $d = 20cm$, la période vaut $6,93s$. Calculer le moment d'inertie de la tige et la constante de la torsion du fil .



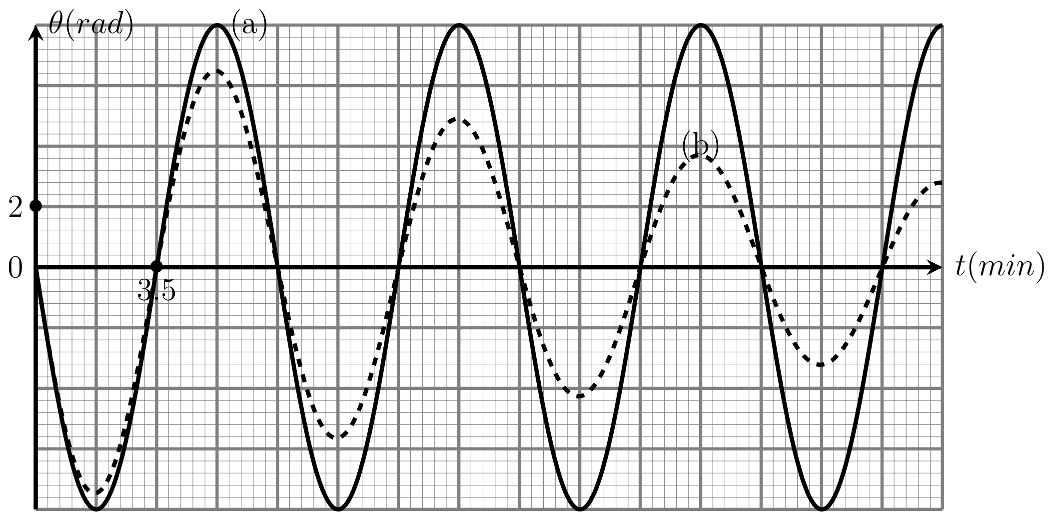
Exercice 3

Une barre horizontale AB est supportée par un fil vertical de constante de torsion C dont une des extrémité est fixée au centre de gravité G de AB , et , l'autre extrémité est attachée à un point fixe O.

Deux masse ponctuelles de même masse sont placées sur l'axe AB de la barre
Le moment d'inertie du système (tige + deux masses) par rapport à un axe Δ matérialisé par le fil vertical est $J_\Delta = 1,46 kg.m^2$
La période propre du pendule de torsion en absence de frottement est $T_0 = 7min$



1. Étude du pendule de torsion
   On néglige tous les frottement et l'angle de torsion sera noté par θ, la vitesse angulaire par $\dfrac{d\theta}{dt}$ et l'accélération angulaire par $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.
   (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle de torsion θ au cours des oscillations du pendule de torsion .
   (b) La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :
   $$\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$
   En utilisant l'équation différentielle et sa solution , trouver l'expression de la période propre T_0 du pendule en fonction de C et J_Δ. En déduire la valeur de la constante de torsion C du fil utilisé dans cette expérience .
2. Exploitation de la représentation $\theta = f(t)$
   On réalise deux expériences pour mesurer la période propre du pendule , l'une , avec frottements , l'autre en absence de frottements . Les deux courbes (a) et (b) de la figure ci-dessous représentent la variation de θ en fonction de t dans chaque cas.



   (a) Indiquer , en justifiant votre réponse , la courbe correspond au régime pseudo-périodique
   (b) Déterminer , en utilisant la figure ci-dessus en absence des frottements , la valeur de la vitesse angulaire du mouvement du pendule de torsion à l'instant $t = 0$

Pendule pesant et pendule simple

Exercice 1
On écarte un pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'une abscisse angulaire de $30°$ et on le lâche . La durée nécessaire pour atteindre la position d'abscisse angulaire de $-30°$ est $1,2s$.

1. Quelle est l'amplitude des oscillations ?
2. Déterminer la période des oscillations .
3. Après 20 oscillations , l'amplitude des oscillations devient égale à $15°$.
   (a) Pour quelle raison l'amplitude a-t-elle diminué ?
   (b) Quelle est alors la nouvelle période des oscillations ? Pourquoi ?

Exercice 2
Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $50cm$, fixé , par l'une des extrémités , à un support et un solide (S) de masse M=200 g , accroché à l'autre extrémité .
On écarte le pendule de sa position d'équilibre et on le lâche .

1. Décrire le mouvement du pendule .
2. Dans quel plan oscille le pendule ?
3. Donner l'expression de la période des oscillations et la calculer
4. La période dépend - t-elle de l'amplitude des oscillation ?

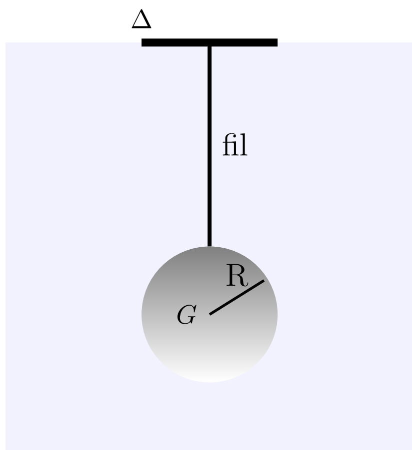
Exercice 3 : Pendule de Foucault
Le 31 Mars 1851, Foucault réalise une expérience pour apporter la preuve expérimentale de la rotation de la Terre autour de son axe . Il utilise un pendule composé d'une boule formée d'une enveloppe de cuivre renferment du plomb de masse $m = 28kg$, suspendue à l'extrémité d'un fil d'acier de diamètre $d = 1,4mm$ et de longueur $l = 67mtre$, accroché en un point situé au centre de la coupole .

1. Le pendule de Foucault est- il un pendule simple ?
2. Calculer la période propre des oscillations T_0
3. Le pendule qui se trouve au musée de Conservation des Arts et Métiers à Paris , est celui qui a été présenté à l'Exposition universelle de Paris en 1855 . Il est formé d'une sphère de masse $25kg$ est d'un fil d'acier de 18 m de long .
   (a) Calculer la période propre des oscillations T_1
   (b) Pourquoi l'amortissement des oscillations n'a-t-il pas gêné l'expérience de Foucault ?

Données : La densité du plomb $d = 11,3$ Le volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi.R^3$

Exercice 4 : Analyse dimensionnel

Un pendule est constitué d'un disque de rayon $R = 10cm$ et de masse m suspendu par un fil de masse négligeable , inextensible et de longueur $l = 15cm$.



1. peut-on assimiler ce pendule à un pendule simple ?
2. La période propre de ce pendule se calcule par la relation suivante :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R^2/2 + (R+l)^2}{g(l+R)}}$$

a. Vérifier par analyse dimensionnel que T_0 à la dimension du temps .

b. Calculer la période des petites oscillations .

c. Quelle est la longueur du pendule simple qui oscille avec la même période (pendule synchrone)

On prend $g = 10m/s^2$

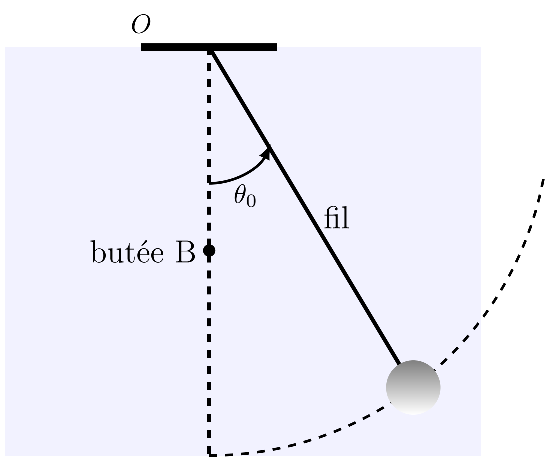
Exercice 5 : Retard d'une horloge

Le balancier d'une horloge peut être assimiler à un pendule simple de période $T2,00s$

1. Quelle est la longueur de ce pendule ?
2. Un élévation de température provoque un allongement de pendule de 3mm
   (a) Le pendule va t - il avancé ou retardé ?
   (b) Calculer l'écart entre l'heur juste et l'heur indiquée par l'horloge au bout de 24 heures
   (c) Dans la pratique , sur les horloges de précision , comment fait-on pour limité l'influence de la température ?

Exercice 6 : pendule peu particulier

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle suspendue à un point fixe O par un fil inextensible et sans masse de longueur $l = 60cm$.
À mi-hauteur du pendule et à la verticale du point O se trouve une butée fixe B (OB=30cm).
On écarte le pendule d'un angle de $\theta_0 = 10°$ puis on le lâche sans vitesse initiale



1. Calculer la durée Δt_1 mise par le pendule pour passer de sa position d'équilibre .

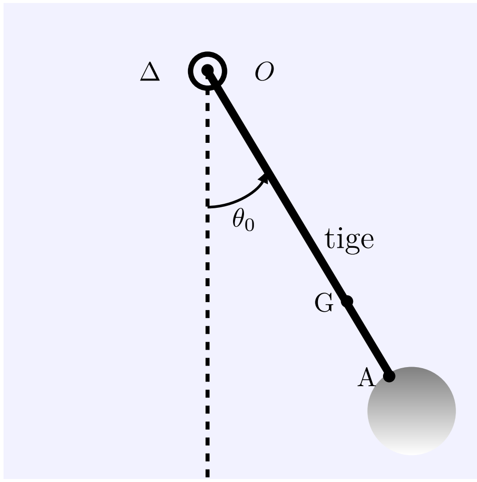
2. Calculer la durée Δt_2 mise par le pendule pour passer de sa position d'équilibre à la position extrémale à gauche .
3. En déduire la période de ce pendule

Exercice 7 : pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une boule homogène de rayon r=2,5 cm et de masse $m = 200g$ et d'une tige homogène de même masse que la boule et de longueur $L = 10r$, l'une des extrémités est soudée à la boule au point A . Le système (Tige+boule) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) passant par le point O de l'autre extrémité de la tige . (voir figure) On néglige tous les frottements et on prend $g = 10m/s^2$

Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ est $J_\Delta = 10^{-2}kg.m^2$.

On écarte le système de sa position d'équilibre stable d'un angle de $\theta_m = 10°$ puis on le lâche sans vitesse initiale à la date t=0 .



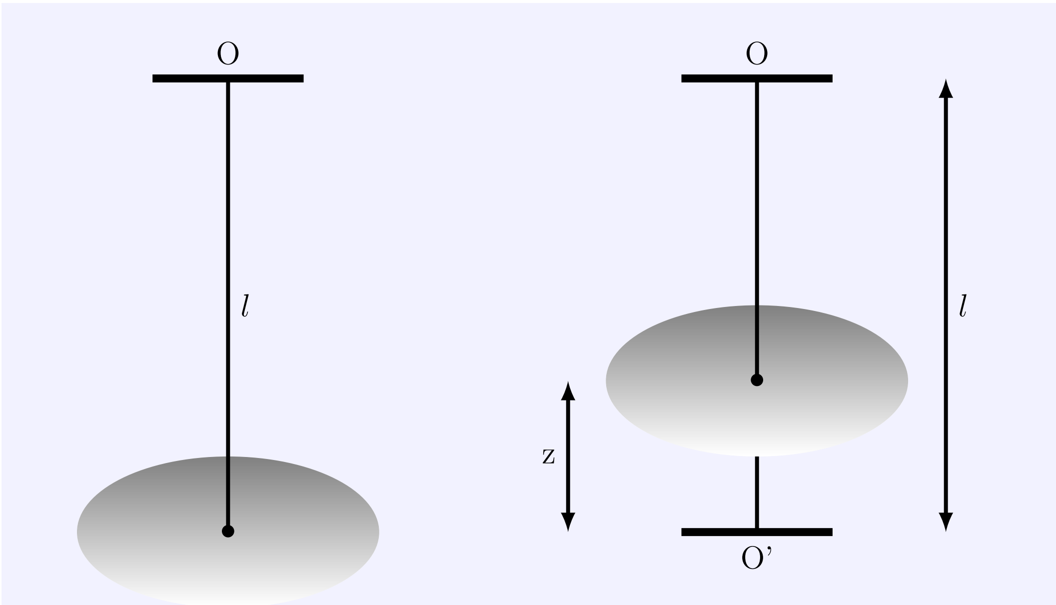
1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au système , montrer que l'équation différentielle du mouvement du système s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{16mg.r}{J_\Delta}\right).\theta = 0$$

2. Quelle est la nature du mouvement du système ?
3. Calculer la période propre du mouvement ;
4. déterminer l'équation horaire du mouvement de système

Problèmes de synthèse

Exercice 1 :
Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique vertical de longueur $l = 0,50m$, fixé à l'une des extrémités un disque horizontal , homogène de moment d'inertie par rapport à son axe Δ, $J_\Delta = 5 \times 10^{-5} kg.m^2$. L'autre extrémité du fil est étant fixé à un point O_1 . Le système (disque+fil) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) matérialisé par le fil métallique et qui passe par le centre d'inertie du disque .

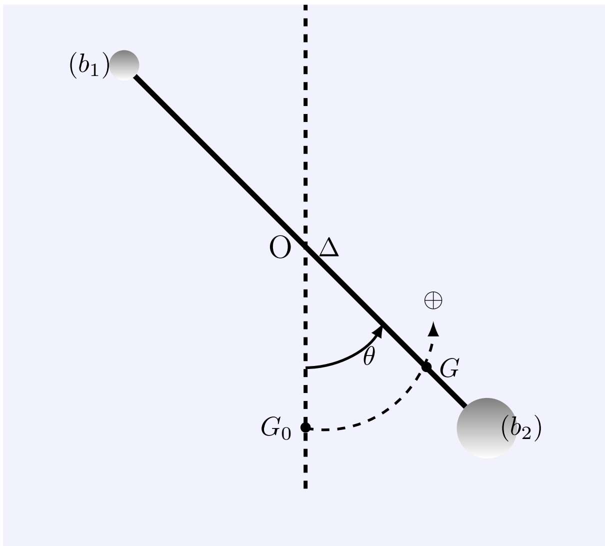


1. Déterminer la nature du mouvement du disque dans le plan horizontal
2. Calculer la constante de torsion C si la période propre $T_0 = 0,92s$
3. Que devient cette période si la longueur est divisée par deux ?
4. Les extrémités supérieure et inférieur du fil étant immobiles , on fixe le disque du pendule tel que son centre d'inertie se trouve à une distance z du point O' du fil . On néglige l'épaisseur du disque devant z . Les deux brins de fil ont une torsion nulle . L'axe de rotation du pendule est vertical .
   (a) Déterminer la nature du mouvement de nouveau pendule et trouver la période T'_0 en fonction de T_0 , l et z sachant que la constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur , si le fil est homogène et de section constante .
   (b) Calculer T'_0 . On donne $z = \dfrac{l}{3}$
   (c) Montrer que la période T'_0 prend une valeur maximale T'_{max} lorsque z est égale une valeur z_m. Calculer z_m et déduire la valeur de T'_{max}.

Exercice 2 :
Pour réaliser un pendule pesant , on fixe deux boules b_1 et b_2 ponctuelles de masses $m_1 = 50g$ et $m_2 = 4m_1$ aux bouts d'une tige homogène de masse négligeable et de longueur

$2l = 0,4m$ qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe (Δ) passant par son milieu O . La position d'équilibre stable du pendule pesant est lorsque le centre de gravité du système se coïncide avec G_0 . On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle très petit $\theta_m = \dfrac{\pi}{20} rad$ et on l'abandonne sans vitesse initiale .

On repère à chaque instant la position du pendule par son abscisse angulaire $\theta = \widehat{\left(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG}\right)}$ voir figure .
Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = (m_1 + m_2)l^2$.



1. En utilisant la relation barycentrique , montrer que le centre de gravité du pendule pesant est :
$$OG = \frac{3}{5}l$$
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au pendule pesant ,montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{5l}\theta = 0$$
Quelle est la nature du mouvement de G ?
3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right)$, Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de l,g . calculer T_0.
4. On considère l'instant où le pendule passe par sa position d'équilibre stable avec une vitesse positive comme origine des date. Écrire l'expression de l'équation horaire $\theta(t)$ en fonction du temps .
5. Soit $\overrightarrow{R_T}$ la composante tangentielle et $\overrightarrow{R_N}$ la composante normale de la réaction $\overrightarrow{R}$ appliquée par l'axe (Δ) à la tige .
   (a) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer , en fonction de m_1 , m_2 , g , et θ_m les expressions de $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$, lorsque la tige est en position où $\theta = \theta_m$
   (b) En déduire l'intensité de la réaction $\overrightarrow{R}$.

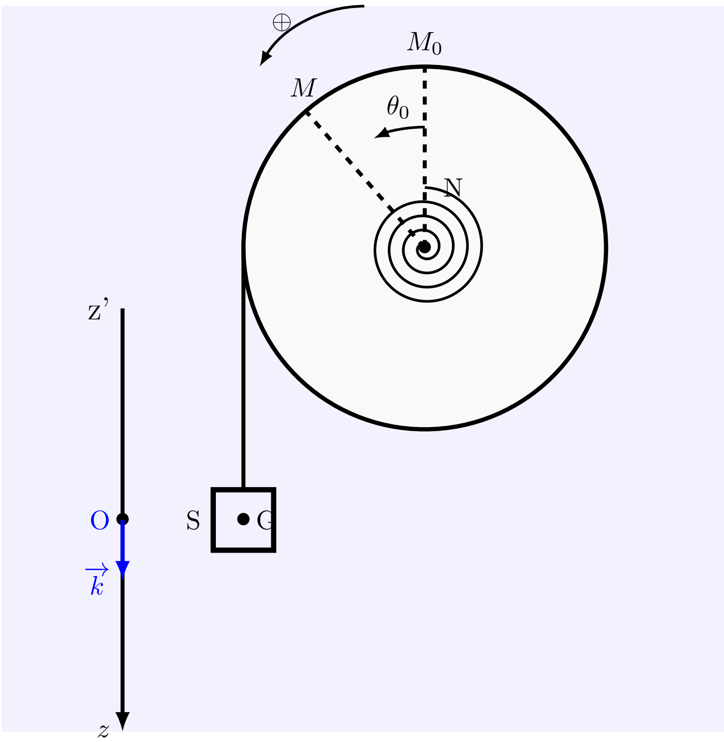
Exercice 3 :

Sur un disque homogène de rayon $r = 10cm$ soudé au son centre d'inertie à une tige cylindrique de masse négligeable et qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe et confondu avec l'axe du tige . Le moment d'inertie du disque est $J_\Delta = 2,50kg.m^2$, on entoure un fil dont lextimité libre supporte une masse $m = 42kg$. On fixe sur l'axe du disque l'extrémité d'un ressort spiral de masse négligeable , l'autre extrémité N étant liée à un support fixe .

Lorsque le ressort spirale n'est pas déformé, l'abscisse angulaire est nul $(\theta = 0)$

À l'équilibre, Le centre d'inertie du corps de masse m se coïncide avec l'origine O de l'axe verticale $(O, \overrightarrow{k})$ et l'angle de rotation du disque est θ_0

Le cylindre s'écarte de sa position d'équilibre d'un angle θ, est soumis de la part du ressort à un couple de torsion, de moment $\mathscr{M}_c = -C.\theta$ avec $C = 12N.m/rad$



1. Écrire une équation donnant θ_0 , angle correspondant à la position d'équilibre du système
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique système ,montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta + mr^2}\theta = 0$$

3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right)$, Déterminer l'expression de la période propre T_0 des petites oscillations . Calculer sa valeur.

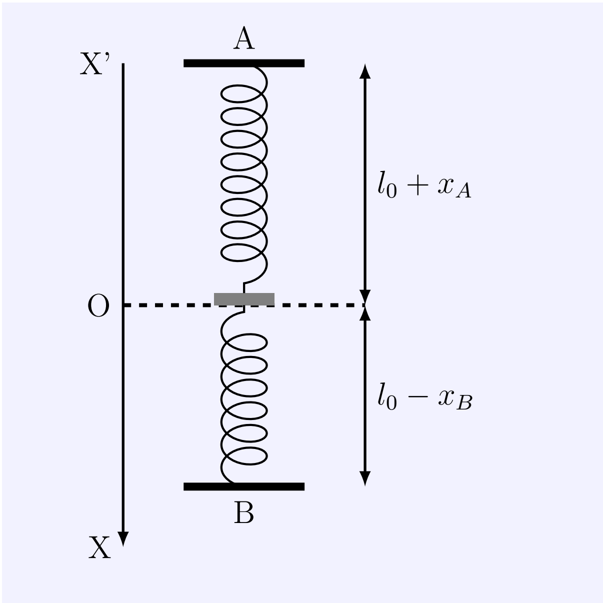
Exercice 4 :

Deux ressorts identiques de longueur l_0 , de raideur K , sont tendus entre deux points A

et B distant de L. Un disque D, de masse M et d'épaisseur négligeable , est fixé entre ces ressorts . voir figure .
On donne : $L = 45cm$; $l_0 = 15cm$; $K = 20N/m$; $g = 10m/s^2$ et $M = 0,1kg$

1. Déterminer la position d'équilibre du disque en déterminant x_A et x_B

2. Le disque est écarter de sa position d'équilibre verticalement , vers le bas de $d = 3cm$ et abandonné sans vitesse initiale .
   a. Par une étude dynamique , donner l'équation différentielle du mouvement du disque (on choisira l'axe XX' comme sur la figure , son origine coïncidant avec la position d'équilibre)
   b. En déduire l'équation horaire du mouvement de D
3. Retrouver l'équation horaire par une étude énergétique .



Exercice 5 : influence de la température et la longueur sur la période d'un pendule **
Un pendule est constitué par un tige métallique OA , de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige passant par O . Sur l'extrémité A , on fixe une masse M supposée ponctuelle . Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur $OA = l$, il effectue des oscillations de faible amplitude. Le pendule battant le seconde à $0°C$ ($T_0 = 2s$) en un lieu où $g_0 = 9,8m/s^2$.
1. Calculer la longueur $OA = l_0$ à cette température .
2. La température s'élève à $20°C$. Quelle variation relative $\dfrac{\Delta T}{T_0}$ du pendule en résulte-t-il sachant que le cœfficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est $\lambda = 1,85 \times 10^{-5} S.I$.
On donne la relation des dilatation des solide en fonction de la température en $°C$ est :

$$l = l_0(1 + \lambda.\theta$$

avec l_0 la longueur de la tige à la température $\theta°C$ et pour $\varepsilon << 1$, nous avons l'approximation suivante : $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n.\varepsilon$

3. Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à $0°C$ (bat la seconde). Cette horloge avance -t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à $20°C$? de combien dans un jour ?

4. À la température $20°C$ la longueur de la tige est l, on fixe une petite masse ponctuelle m au milieu de la tige . Calculer la nouvelle période de ce pendule composé en fonction de l,M,m et g .

On rappelle que le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m distant de l'axe de rotation de d est $J_\Delta = md^2$

Montrer que la présence de m diminue la période propre du pendule .

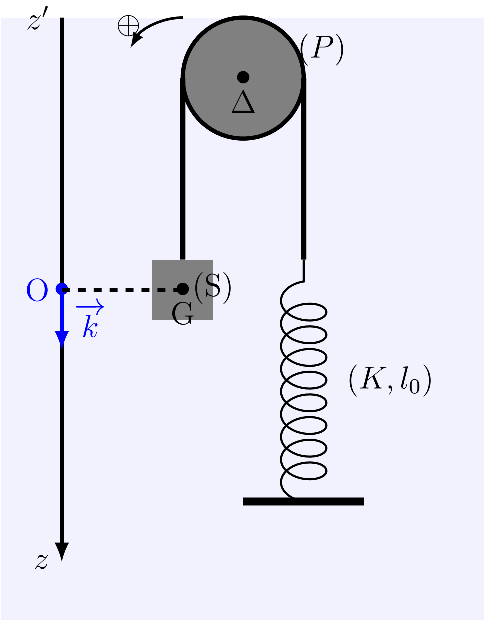
5. Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié bat rigoureusement la seconde à $20°C$

Exercice 6 : détermination du moment d'inertie d'un cylindre d'une poulie homogène (P)

Le but de cet exercice est de déterminer le moment d'inertie J_Δ d'un cylindre d'une poulie homogène de rayon $r = 0,15m$ qui peut tourner autour de son axe Δ fixe .

On considère un ressort à spire non jointif de masse négligeable et de raideur K et sa longueur initiale est $l_0 = 0,2m$.

On relie l'extrémité mobile du ressort à un corps solide (S) de masse $m = 0,3kg$ par un fil inextensible et de masse négligeable passant par la gorge de la poule (P) sans glissement .



1. À l'équilibre la longueur finale du ressort est $l = 0,25m$, déterminer l'expression du raideur du ressort et calculer sa valeur . 2. On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale .

2.1 En faisant une étude dynamique sur le système mécanique , établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie de (S) .

2.2 Déterminer l'expression du moment d'inertie de la poulie (P) J_Δ en fonction de m,r,K et la période propre T des oscillations . 2.3 Calculer J_Δ sachant que la période propre $T = 0,49s$.