الكهرباء في السنة الثانية من سلك بكالوريا

محداد علال

24 دجنبر 2013

المُحتويات

الباب I

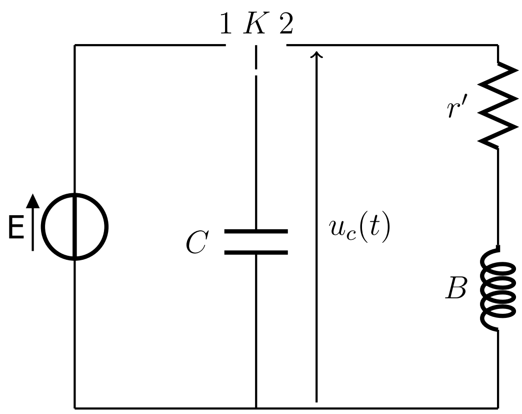
الكهرباء

الفَصْل 1

التذبذبات الحرة في دارة متوالية RLC

1.1 الدراسة التجريبية لتفريغ مكثف في وشيعة

1.1.1 النشاط التجريبي 1



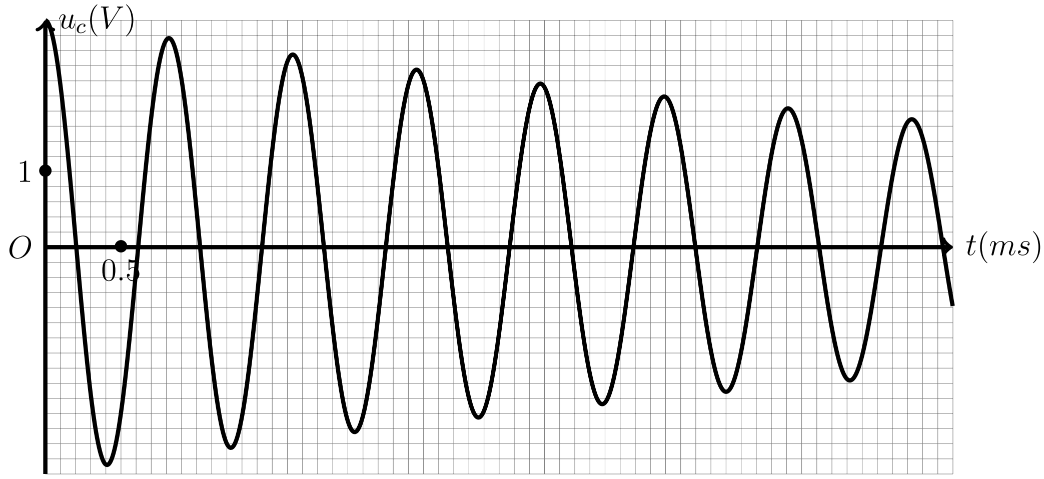
ننجز التركيب الكهربائي الممثل جانبه حيث نستعمل وسيط معلوماتي وحاسوب وبرنم يعالج المعطيات أو راسم التذبذب ذاكراتي .

+ نضبط التوتر المستمر الذي يعطيه المولد على القيمة E=3Vومقاومة الموصل الاومي على $r' = 0\Omega$ +نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (1) لمدة زمنية كافية لشحن المكثف كليا .

+نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (2) فنحصل على دارة RLC متوالية مقاومتها الكلية $R = r + r'$حيث r مقاومة الو شيعة .

+نعاين التوتر $u_C(t)$بين مربطي المكثف

نحصل على المنحنى التالي :



الاستثمار:

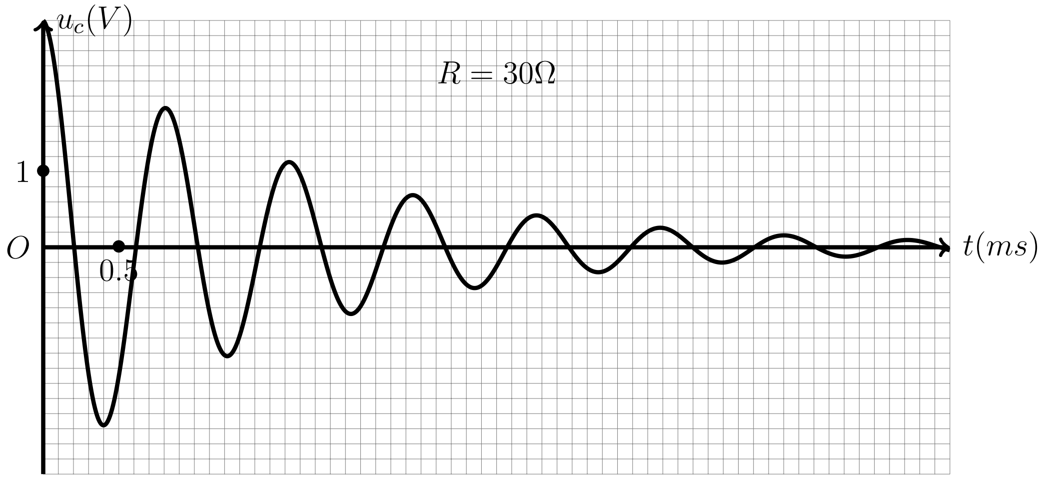
1ــ يمثل الرسم التذبذبي الممثل في الشكل أعلاه نموذجا للمنحنى المحصل عليه بالنسبة $R = 10\Omega$
كيف يتغير وسع التوتر $u_c(t)$ ؟ هل $u_c(t)$ دالة دورية ؟

عند وضع K في الموضع (1) يشحن المكثف وعند وضعه في الموضع (2) نحصل على دارة RLC متوالية حيث في هذه الحالة يفرغ المكثف في الوشيعة . ويكون التوتر $u_c(t)$ بين مربطي المكثف متناوبا . $u_c(t)$ ليست بدالة دورية .

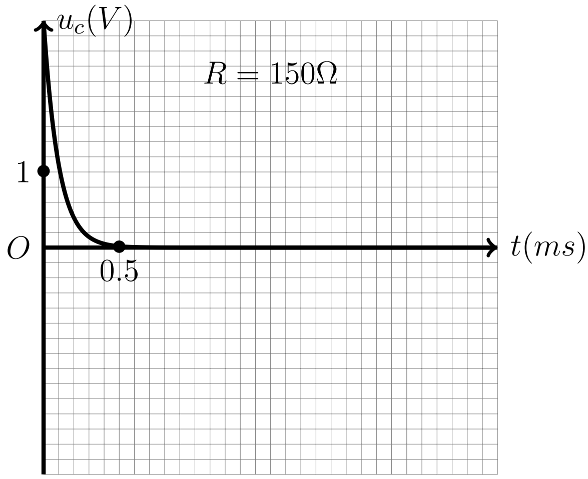
* ـ وسع التوتر $u_c(t)$ يتناقص مع الزمن t نقول أن التذبذبات **مخمدة**
بما أن الذبذبات تتم دون أن نزود الدارة RLC بالطاقة غير الطاقة المخزونة في المكثف ، نقول أن **الذبذبات حرة**

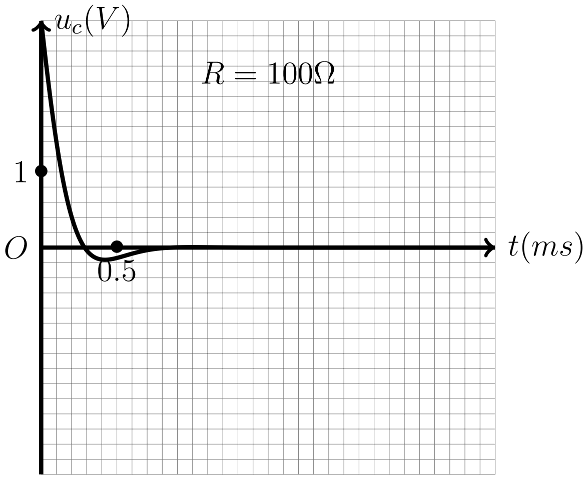
خلاصة
يؤدي تفريغ مكثف ، مشحون ، في وشيعة دارة RLC متوالية ، إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة .
نقول أن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا ومخمدا

تعريف بشبه الدور
نسمي شبه الدور المدةT الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_c(t)$.
2 ـ عين مبيانيا T
من خلال المبيان لدينا : $T = 0,8ms$
3 ـ نضبط مقاومة الموصل الأومي على $r' = 20\Omega$ فنحصل على المنحنى التالي :



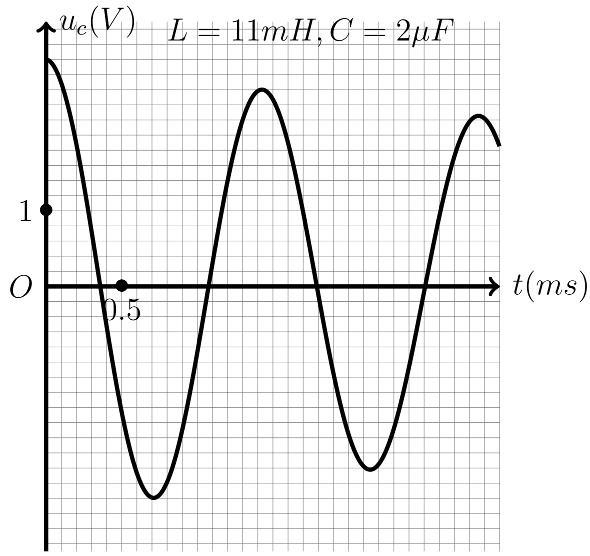
ما تأثير المقاومة R على :
2-1 ـ وسع التذبذبات ؟
عندما نغير المقاومة الكلية للدارة يتغير وسع الذبذبات.
2-2 ـ شبه الدور T ؟
بالنسبة لقيم المقاومة صغيرة جدا يلاحظ أن شبه الدور لا يتعلق بقيمة R
3- نضبط مقاومة الموصل الأومي على القيمتين : $r' = 100\Omega$ و $r' = 150\Omega$

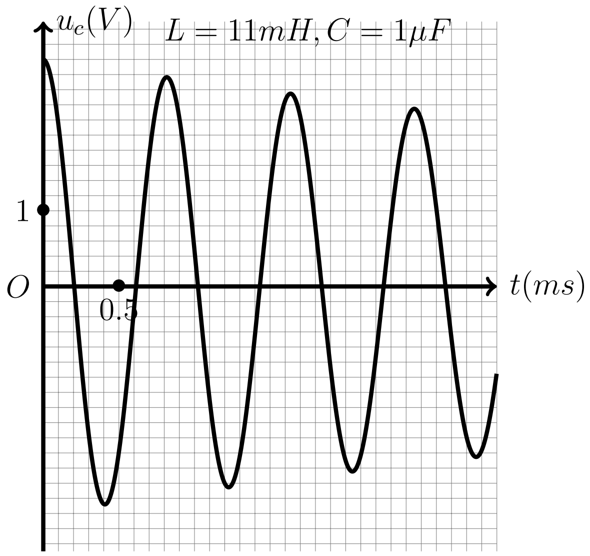




هل التوتر المعاين $u_c(t)$ تذبذبي ؟
عندما تأخذ R قيم كبيرة جدا $u_c(t)$ توتر غير تذبذبي أي أن الذبذبات تزول يكون لدينا خمود مهم .
4-حسب قيم المقاومة الكلية R للدارة يلاحظRLC تجريبيا وجود نظامين للذبذبات : نظام شبه دوري ونظام لا دوري .

تعرف على هاذين النظامين من خلال الأشكال السابقة
النظام شبه الدوري يحدث إذا كانت قيمة المقاومة R صغيرة .
النظام لا دوري عندما تكون R كبيرة جدا حيث تزول الذبذبات نظرا لوجود خمود مهم .
5- نضبط من جديد R على القيمة 10Ω
في مرحلة أولى نأخذ $L = 11mH$ و $C = 1F$ ونقيس شبه الدور T .
في مرحلة ثانية : نأخذ $L = 11mH$ و $C = 2F$ ونقيس شبه الدور T





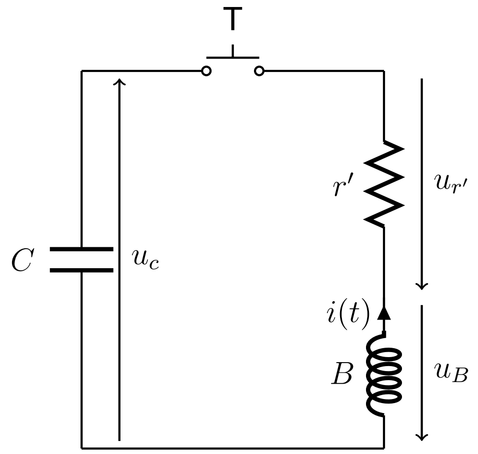
هل يتعلق شبه الدور بكل من L و C ؟
نعم يتعلق شبه الدور بقيم L و C

2.1.1 أنظمة الذبذبات الحرة

حسب مقاومة الدارة RLC نحصل على ثلاثة أنظمة
أ-نظام شبه دوري
R صغيرة نحصل على ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن
ب - نظام لا دوري
R كبيرة جدا : تزول الذبذبات نظرا لوجود خمود مهم ونسمي هدا النظام نظام لا دوري
ج- نظام حرج
في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرمز لها ب R_c وتسمى مقاومة حرجة وهي مقاومة تفصل بين النظام شبه الدوري والنظام اللا دوري ونسمي النظام في هده الحالة بالنظام الحرج وفي هده الحالة يرجع التوتر $u_c(t)$ إلى صفر بسرعة ودون تذبذب وتتعلق بR_c C و L .

2.1 الدراسة النظرية للدارة المتوالية RLC

1.2.1 المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية



نعتبر الدارة المتوالية الممثلة في الشكل جانبه :
نطبق قانون إضافية التوترات بين F و D فنجد :

$$u_c + u_B + u_{r'} = 0 \Rightarrow u_c + (r + r')i(t) + L\frac{di}{dt} = 0$$

بحيث أن : $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ و $\dfrac{di}{dt} = C\dfrac{d^2uc}{dt^2}$ وبالتالي فإن :

$$u_c + RC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر u_c بين مربطي المكثف هي :

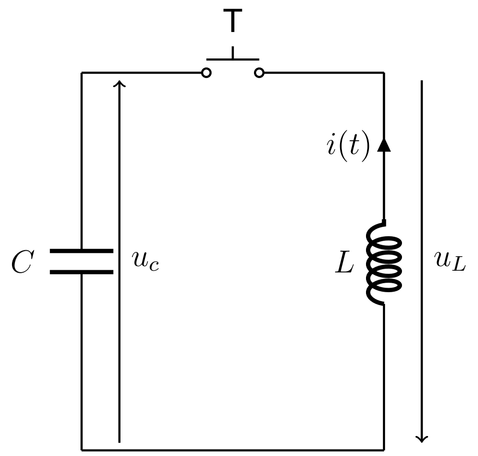
$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$$

يعبر المقدار $\dfrac{L}{R}\dfrac{du_c}{dt}$ عن ظاهرة خمود الذبذبات ، ويحدد حسب قيم R نظام هذه الذبذبات .
في حالة النظام شبه الدوري ، يكتب حل هذه المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$u_c(t) = U_0e^{-\lambda t}cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$

بحيث أن $\lambda = \dfrac{L}{2R}$ وجميع الثوابت تحدد انطلاقا من التمثيل المبياني .

2.2.1 الذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC



تتكون الدارة من مكثف سعته C وشحنته البدئية q_0 ووشيعة معامل تحريضها L مقاومتها الداخلية r نعتبرها مهملة . تنعث هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحقيقها تجريبيا لكون أن كل الوشيعات تتوفر على مقاومة داخلية .

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $uc(t)$.

نطبق قانون إضافية التوترات فنجد :

$$u_c + u_L = 0 \Rightarrow u_c + L\frac{di}{dt} = 0$$

بحيث أن : $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ و $\dfrac{di}{dt} = C\dfrac{d^2uc}{dt^2}$

وبالتالي فإن :

$$u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_c=0$$

خلال الذبذبات الكهربائية الحرة غير المخمدة لدارة LC ، يحقق التوتر$u_c(t)$ بين مربطي المكثف المعادلة التفاضلية التالية :

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_c=0}$$

حل المعادلة التفاضلية :

المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_c=0$ معادلة خطية من الدرجة الثانية ، رياضيا حلها يكتب على الشكل التالي :

$$u_c(t)=U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

ـU_m وسع الذبذبات
φ الطور في اللحظة ذات التاريخ t
T_0 :
الدور الخاص للذبذبات . $\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$: الطور عند أصل التواريخ (t=0)

أ ـ تحديد تعبير الدور الخاص T_0 :
نعوض الحل في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{du_c}{dt}=-U_m\frac{2\pi}{T_0}sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}=-\frac{4\pi^2}{T_0^2}cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

أي أن : $\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{4\pi^2}{T_0^2}u_c=0$ $u_c(t)$ حلا للمعادلة التفاضلية ، يكفي أن تكون

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2}=\frac{1}{LC}$$

وبالتالي فإن :

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{LC}}$$

خلاصة

يتعلق الدور الخاص للذبذبات الحرة غير المخمدة بمعامل التحريض L وبسعة المكثف C :

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{LC}}$$

وحدة الدور الخاص T_0 في النظام العالمي للحدات هي الثانية (s)

ب ـ تحديد φ **و** U_m :
لتحديد قيم φ و U_m نحدد الشروط البدئية عند تفريغ المكثف في الوشيعة . أي نعبر عن المقدارين $u_c(t)$ و $i(t)$ في اللحظة t=0 باعتبار أن هاتين الدالتين متصلتين كيف ما كانت t .

لدينا $i(t) = C\frac{u_c}{dt} = -C\frac{2\pi}{T_0}sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

عند اللحظة t=0 لدينا i(0)=0 الوشيعة لا يمر فيها أي تيار كهربائي

$$i(t) = -C\frac{2\pi}{T_0}sin\left(\varphi\right) = 0$$

$sin\varphi = 0$ أي أن : $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$

من جهة أخرى لدينا عند $t = 0$ المكثف مشحون أي أن $u_c(0) = U_0$

$$U_0 = U_m cos\varphi \Rightarrow cos\varphi = \frac{U_0}{U_m} > 0$$

أي أن $\boxed{\varphi = 0}$ و $\boxed{U_m = U_0}$ وبالتالي فإن :

$$\boxed{u_c(t) = U_m cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)}$$

ج ـ تعبير الشحنة $q(t)$ **و** $i(t)$

نعلم أن شحنة المكثف هي :

$$q(t) = Cu_c(t) = CU_m cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

لدينا $q(0) = CU_m$ أي أن تعبير الشحنة للمكثف :

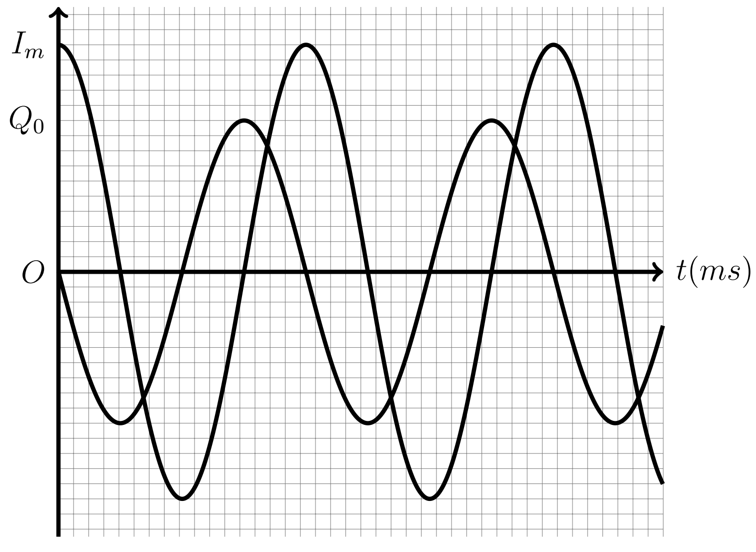
$$\boxed{q(t) = Q_m cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)}$$

تعبير شدة التيار الكهربائي :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{CU_m}{\sqrt{LC}}sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

$$\boxed{i(t) = -U_m\sqrt{\frac{C}{L}}sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)}$$

أي أن شدة التيار القصوية هي : $I_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}}$ وأن $i(t) = I_m cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2}\right)$ أي أن $i(t)$ متقدمة في الطور على $q(t)$ ب $\pi/2$ وأن $i(t)$ و $q(t)$ على تربيع في الطور .



ملحوظة : عندما تكون شحنة المكثف قصوية تكون شدة التيار الكهربائي منعدمة . والعكس صحيح

3.1 انتقالات الطاقة بين المكثف والوشيعة .

توصلنا في الدروس السابقة أن المكثف بإمكانه أن يخزن طاقة كهربائية :

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu_c^2$$

وأن الوشيعة كذلك بإمكانها أن تخزن طاقة مغنطيسية :

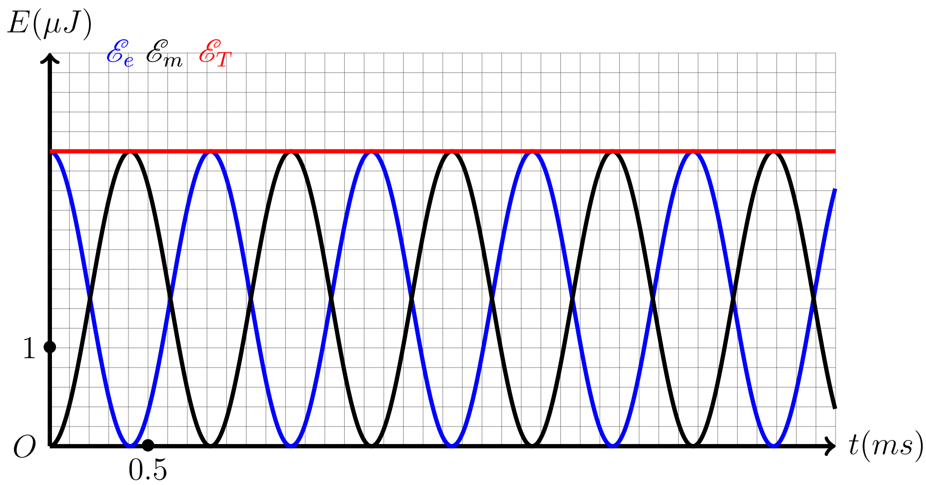
$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

نعبر عن الطاقة الكلية $\mathscr{E}_T$ بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\mathscr{E}_T = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2}$$

1.3.1 الطاقة في الدارة LC مثالية :

نعتبر دارة مثالية LC ، بواسطة برنم خاص electricite نحصل على التسجيل التالي لتغيرات $\mathscr{E}_m$ و $\mathscr{E}_e$ و $\mathscr{E}_m$ بدلالة الزمن الممثل في الشكل أسفله :



دراسة منحنيات تغير الطاقات بدلالة الزمن في دارة LC مثالية .

1 ـ كيف تتغير الطاقة عندما تنقص الطاقة المخزونة في المكثف ؟

عندما تنقص الطاقة المخزونة في المكثف تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعة والعكس صحيح

ـ كيف تتغير الطاقة عندما تنقص الطاقة المخزونة في الوشيعة ؟

عندما تنقص الطاقة المخزونة في الوشيعة تزداد الطاقة المخزونة في المكثف والعكس صحيح

ـ كيف تتغير الطاقة الكلية ؟

الطاقة الكلية ثابتة خلال الزمن أي أن هناك تبادل الطاقة بين المكثف والوشيعة وبما أن الطاقة الكلية ثابتة ، هناك انحفاظ الطاقة الكلية للدارة .

4 ـ أثبت رياضيا أن الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن t . بطريقتين ، استعمال حل المعادلة التفاضلية واستعمال المعادلة التفاضلية مباشرة .

الطريقة الأولى :

$$E_T = E_e + E_m \Rightarrow E_T = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

لدينا : $u_c = U_m cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$ و $i(t) = -I_m \frac{2\pi}{T_0} sin(\frac{2\pi}{T_0}t)$ بحيث أن $I_m = \frac{CU_m}{\sqrt{LC}}$

$$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{2}LI_m^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{2}L\left(\frac{CU_m}{\sqrt{LC}}\right)^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_T = \frac{1}{2}CU_{m^2}\left(cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right)$$

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2}$$

الطريقة الثانية : استعمال المعادلة التفاضلية مباشرة :
لدينا :

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{du_c^2}{dt} + \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = Cu_c\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = Cu_c\frac{du_c}{dt} + LC^2\frac{du_c}{dt} \times \frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_c}{dt}\left(u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}\right)$$

$$\frac{dE_T}{dt} = 0 \Rightarrow E_T = 0$$

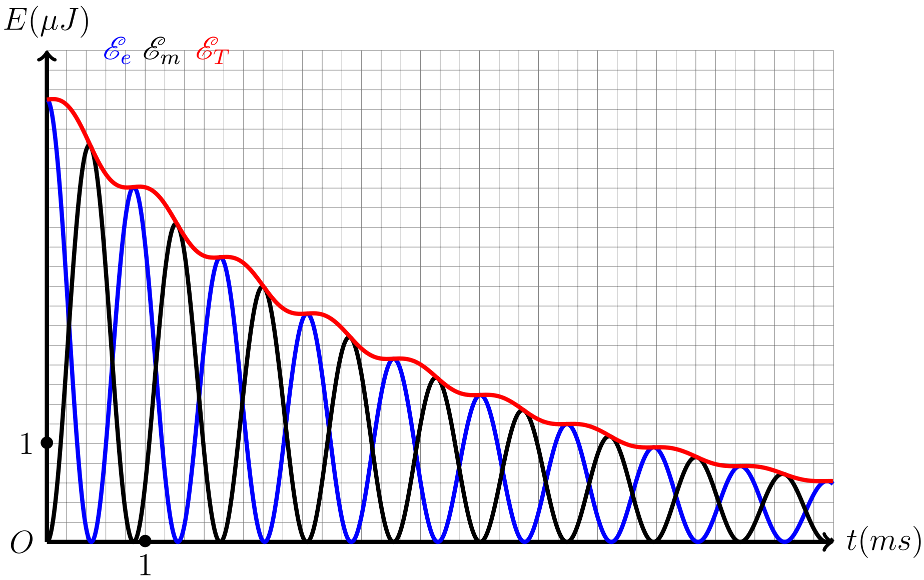
خلاصة

تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف .
خلال الذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغنطيسية في الوشيعة والعكس صحيح .

$$\boxed{E_T = E_m + E_e = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2}$$

2.3.1 الطاقة في الدارة RLC المتوالية .

خلال دراسة تجريبية لدارة RLC متوالية حيث المقاومة الكلية R غير منعدمة نعاين بواسطة جهاز ملائم منحنيات تغيرات الطاقة E_m, E_e, E_T بدلالة الزمن فنحصل على المنحنيات الممثلة في الشكل أسفله :



1 ـ كيف تتغير الطاقة E_e عند تزايد E_m ؟
نفس السؤال عند تناقص E_m .
ماذا تستنتج ؟
عندما تنقص الطاقة في المكثف تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعة والعكس صحيح . أي أن هناك تبادل طاقي بين المكثف والوشيعة خلال الدور $T = T_0/2$ بحيث أن T_0 الدور الخاص للذبذبات
2 ـ كيف تتغير بصفة عامة الطاقة الكلية المخزونة في الدارة بدلالة الزمن ؟
يلاحظ أن خلال كل تبادل طاقي بين المكثف والوشيعة تتناقص الطاقة الكلية نتيجة وجود المقاومة R .
ـ ما الظاهرة المسؤولة عن هذا التغيير ؟
ظاهرة خمود نتيجة تحول جزء من الطاقة الكلية بمفعول جول إلى طاقة حرارية .

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{du_c^2}{dt} + \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = Cu_c\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = Cu_c\frac{du_c}{dt} + LC^2\frac{du_c}{dt} \times \frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_c}{dt}\left(u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}\right)$$

$$\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_c}{dt}\left(LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_c بين مربطي المكثف :

$$\frac{dE_T}{dt} = C\frac{du_c}{dt}\left(-RC\frac{du_c}{dt}\right)$$

$$\boxed{\frac{dE_T}{dt} = -Ri^2}$$

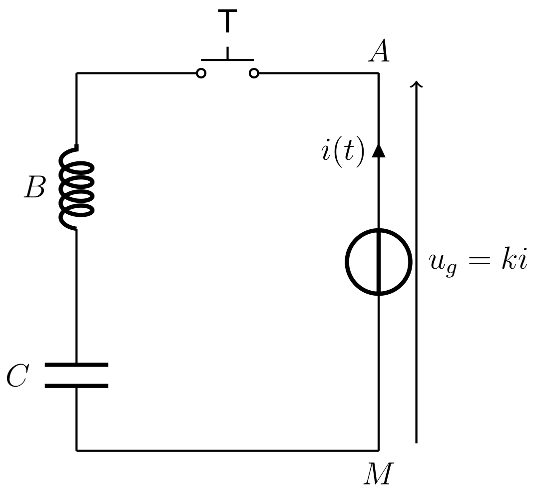
من خلال هذه النتيجة يتبين أن الطاقة الكلية تناقصية ويعزى هذا التناقص إلى وجود المقاومة R .

خلاصة

تتناقص الطاقة الكلية لدارة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .

4.1 صيانة الذبذبات .

نعتبر التركيب التجريبي التالي : في كل لحظة يمكن كتابة حسب قانون إضافية التوترات



$$u_{AM} = u_c + u_B$$

$$ki = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

لدينا : $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

$$kC\frac{du_c}{dt} = rC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c$$

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + (r-k)\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

بالنسبة لk=R نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

وهي المعادلة المميزة للمتذبذب (L,C) ذي مقاومة مهملة .

إذن فالتركيب المدروس يمكِّن من صيانة التذبذبات .