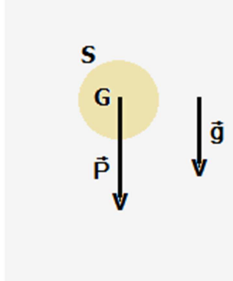


السقوط الرأسي لجسم صلب

I - مجال الثقالة

تعريف

جميع الأجسام الموجودة على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها تخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب \vec{P} . و هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب \vec{g} بحيث أن :



$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (1)$$

مميزات متجهة مجال الثقالة \vec{g} :

- الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .
- المنحى : نحو الأرض

- المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة N/kg^{-1}

ملحوظة : تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

II - القوى المطبقة من طرف مائع على جسم صلب .

1- قوى الاحتكاك المائع

كل جسم في حركة داخل مائع ، يخضع إلى قوى احتكاك مطبقة عليه من طرف هذا الأخير . (قوى التماس وموزعة)

تكافئ هذه القوى ، قوة وحيدة تسمى **قوة الاحتكاك المائع** ورمز لها ب \vec{f}

مميزات قوة الاحتكاك المائع :

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور G للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز قصور الجسم

الشدة : تتعلق بشكل الجسم وبأبعاده ، وبحالة سطحه ، وتتعلق كذلك بلزوجة المائع وبسرعة

الجسم المتحرك بالنسبة للمائع

ننمذج شدتها بالعلاقة التالية : $f = k.v_G^n$ حيث k ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع $v_G = v$ ، فتصبح العلاقة

$$f = k.v^n \quad (2)$$

ملحوظة : عندما تكون قيمة السرعة صغيرة (أقل من 1cm/s) ، نأخذ $n=1$ ، فتصبح العلاقة

السابقة كالآتي : $f = k.v$ ، في هذه الحالة تتعلق k بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة v متوسطة (أكبر من 1cm/s وأقل من 10m/s) ، نأخذ $n=2$ تصبح

العلاقة السابقة $f = k.v^2$ في هذه الحالة ، لاتتعلق k بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

2 - دافعة أرخميدس

يخضع كل جسم مغمور كلياً أو جزئياً في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ، يسمى مجموع هذه القوى

بدافعة أرخميدس .

مميزاتها هي :

- نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

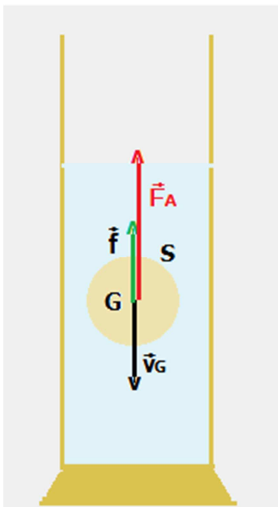
- الانجاه : الخط الرأسي

- المنحى : نحو الأعلى

- الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع : $F_A = m_0g = \rho_f.V.g$ (3) بحيث أن m_0 كتلة

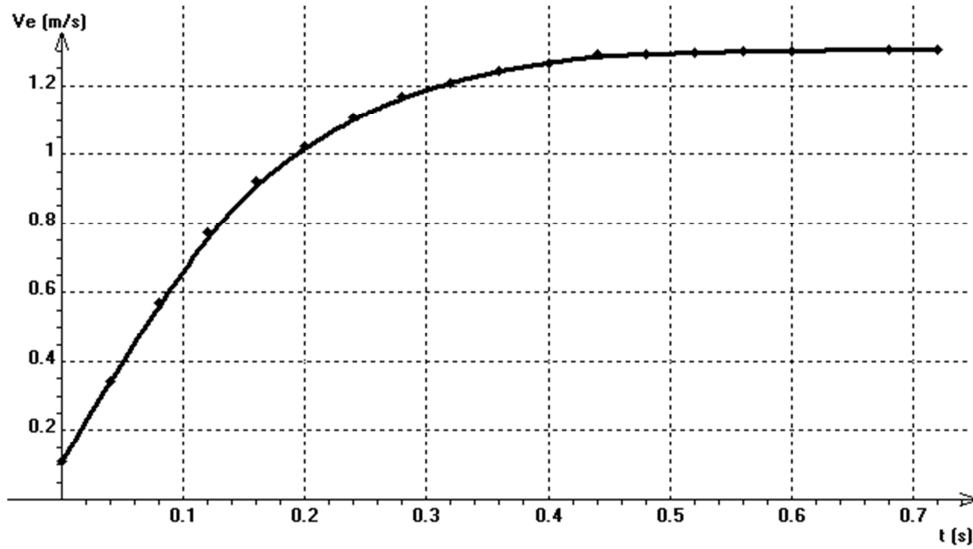
المائع المزاح و ρ_f الكتلة الحجمية للمائع ب kg/m^3 و V الحجم المزاح للمائع (m^3) و g

شدة مجال الثقالة (N/kg) أو m/s^2 ، F_A شدة دافعة أرخميدس (N)



III - السقوط الرأسى لجسم صلب بالإحتكاك
1 - الدراسة التجريبية

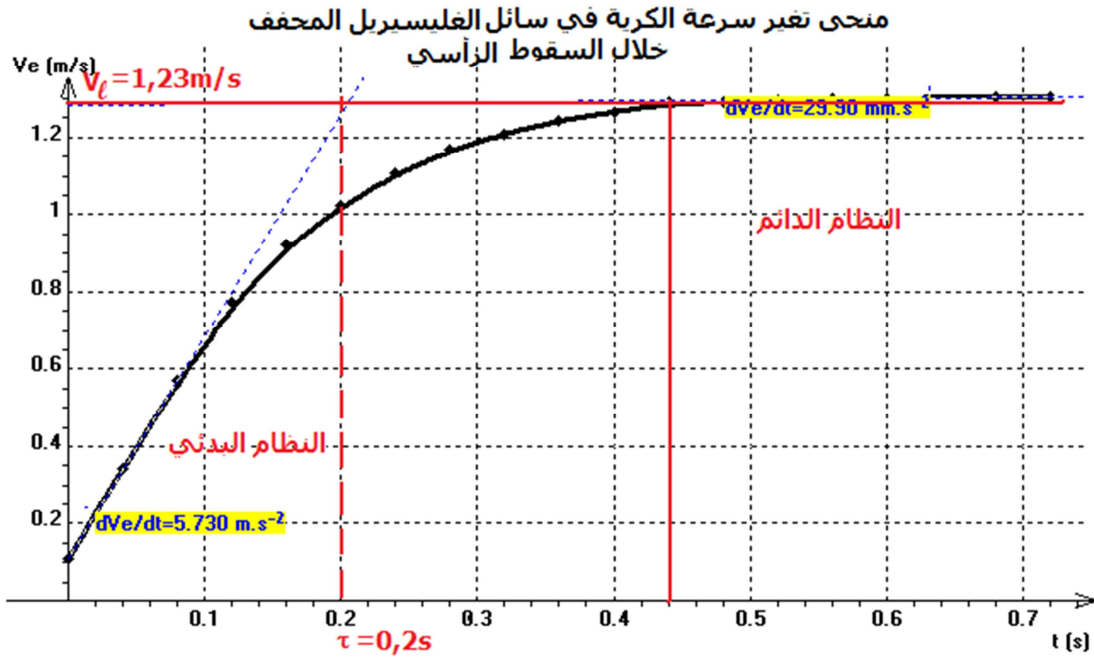
الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقتة أولير
العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة 1l . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية $\rho_f = 1,07 \text{ g/ml}$ ، كرية فولاذية كتلتها $m_b = 6,88 \text{ g}$ وشعاعها $R = 5,9 \text{ mm}$ نسجل حركة الكرية في السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع (avi) .
نستعمل برنم أفيميك Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال سقوطها مع اختيار محور رأسى موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج (t, y) .
نرسل جدول القياس إلى برنم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة السرعة \vec{v}_G وهي $v = \frac{dy}{dt}$ ، يقوم البرنم بحساب قيم v ثم رسم منحنى تغيرات v بدلالة الزمن t على الشاشة ، ثم نحفظ الملف .



استثمار

1 - استغلال المنحنى $v=f(t)$

المنحنى المحصل عليه بواسطة البرنم Regressi :



تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

أ - يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة G مركز قصور الكرية في كل نظام .

- النظام البدئي : v_{exp} دالة زمنية متغيرة

- في النظام الدائم : $v_{exp} \approx v_\ell$ أي تبقى ثابتة خلال الزمن .

ب - هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع \vec{a}_G مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .

- في النظام البدئي : $a_G(t) = \frac{\Delta v_G}{\Delta t}$ عمليا يمثل هذا التغير المعامل الموجه للدالة v_G عند كل لحظة t ، ومن خلال المنحنى

يلاحظ أن المعامل الموجه يتناقص مع الزمن t و كذلك التسارع a_G :

- عند $t=0$ لدينا $\left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0}$ قسوية

- في النظام الدائم $t \rightarrow +\infty$ لدينا $\left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=+\infty} = 0$ لكون أن $v_G = v_\ell$ أي أن حركة الكرية رأسية منتظمة .

وبالتالي فإن متجهة التسارع تتناقص إلى أن تأخذ قيمة منعدمة .

ج - مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .

يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية v_ℓ . حدد قيمة v_ℓ .

تحديد قيمة v_ℓ : $v_\ell = 1,23 \text{ m/s}$

د - مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل O . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها τ نسميه الزمن المميز . عين قيمة τ .

لدينا $\tau = 0,2 \text{ s}$

هـ - ما قيمة a_0 لإحداثية \vec{a}_0 على المحور الرأسي عند اللحظة $t=0$ ؟

قيمة a_0 ، المعامل الموجه في النقطة $t=0$:

$$a_0 = \left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\Delta v_G}{\Delta t} = \frac{v_\ell}{\tau} = 6,12 \text{ m/s}^2$$

2 - الدراسة النظرية

أ - أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة G مركز قصور الكرية .

مرجعا مرتبط بالمختبر والذي يعتبر كمرجع غاليلي .

ب - المعادلة التفاضلية للحركة

أثناء سقوط الكرية ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرية . حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .

دراسة حركة كرية كتلتها m_b وحجمها V وكتلتها الحجمية ρ_{bille} في مائع

كتلته الحجمية ρ_{fluide} في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .

بما أن حركة الكرية رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد

و ممنتظم موجه نحو الأسفل (O, \vec{k}) .

- المجموعة المدروسة : الكرية

- جرد القوى الخارجية المطبقة على الكرية خلال سقوطها :

\vec{P} : وزن الكرية ، $\vec{P} = m_b \cdot \vec{g}$

\vec{F}_A : دافعة أرخميدس : $\vec{F}_A = -m_f \cdot \vec{g} = -\rho_f \cdot V \cdot \vec{g}$

\vec{f} : قوة الاحتكاك المائع : $\vec{f} = -k \cdot v^n \cdot \vec{k}$

القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي هي قوة الاحتكاك المائع

ج - أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرية و m_b كتلة الكرية و متجهة التسارع

لمركز قصور الجسم \vec{a}_G .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الكرية في مرجع مرتبط بالمختبر وهو مرجع غاليليا تكون لدينا العلاقة المتجهية التالية :

$$\vec{f} + \vec{F}_A + \vec{P} = m_b \cdot \vec{a}$$

تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

د - بإسقاط هذه العلاقة على المحور (O, \vec{k}) الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :

$$(1) \frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

عبر عن A و B بدلالة m_b و k و F_A و g شدة الثقالة .

نسقط العلاقة المتجهية على المحور (O, \vec{k}) ، نحصل على المتساوية التالية :

$$m_{bille}g - m_f g - kv^n = m_{bille} \cdot a$$

$$(m_b - m_f)g - kv^n = m_b \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$A = \frac{(m_b - m_f)}{m_b} g \quad B = \frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n \quad (4)$$

تمثل هذه المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الكرية خلال السقوط الرأسي في السائل

2 - تحديد المقادير المميزة للحركة

ه - السرعة الحدية للكرية : بين أن سرعة G تبلغ قيمة حدية v_ℓ ، واعط تعبير v_ℓ بدلالة A و B و n .

تبين التجربة أن متجهة السرعة للكرية تتناهى إلى قيمة حدية ، تسمى بالسرعة الحدية للكرية v_ℓ

بحيث تصبح حركة الكرية حركة مستقيمة منتظمة أي أن : $\frac{dv}{dt} = 0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A - Bv_\ell^n = 0 \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell = \left(\frac{g}{k}(m_b - m_f)\right)^{\frac{1}{n}} \quad (5)$$

- عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية v_ℓ تخضع حركة G إلى نظام يسمى **النظام الدائم** ويتميز بثبات السرعة .

3 - النظام البدئي

و - أحسب قيمة التسارع البدئي a_0 عند اللحظة $t=0$.

قبل تحرير الكرية فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم .

في اللحظة $t_0=0$ نحرر الكرية ، فيصبح مجموع القوى المطبقة عليها غير منعدم ، فتبدأ حركة السقوط الرأسي للكرية وتزايد

سرعتها مركز قصورها ؛ تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور حركة G نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوى

المطبقة على الكرية مرة أخرى منعدم : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ أي أن $a=0$.

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة $t_0 = 0$ لدينا $a_G(t_0 = 0) = a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$ بحيث أن a_0 هو التسارع البدئي لمركز القصور G

للكرية . لدينا كذلك $\vec{f} = \vec{0}$

$$(m_b - m_f)g = m_b \cdot a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{(m_b - m_f)g}{m_b} = \left(1 - \frac{m_f}{m_b}\right)g \quad (6)$$

مبيانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى $v=f(t)$ عند اللحظة $t_0=0$.

$$a_0 = \frac{v_\ell}{\tau} = 6,12m/s^2$$

و - أثبت أن العلاقة (1) تكتب على النحو التالي : $(2) \frac{dv}{dt} = A \left(1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^n\right)$

تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

$$a = A - Bv^n \Rightarrow 0 = A - Bv_\ell^n$$

$$v_\ell^n = \frac{A}{B}$$

$$\frac{dv}{dt} = A \left(1 - \frac{B}{A} v^n \right)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{v_\ell^n} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = A \left(1 - \left(\frac{v}{v_\ell} \right)^n \right) \quad (7)$$

ويمكن كذلك أن نبين أنه في اللحظة $t=0$ $a_0 = A$ $\left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=0}$ لكون أن $v=0$

4 - الزمن المميز للحركة

يتقاطع الخط المماس للمنحنى $v=f(t)$ مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها τ نسميه **الزمن المميز للحركة**

$$v_\ell = a_0 \tau \quad (8)$$

ملحوظة : تمكن قيمة τ من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

5 - حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

أ - مبدأ الطريقة

- تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض $v(t)$ بدالة تقاربها محليا بحيث نعلم أن

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \left(\frac{dv}{dt} \right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t \quad (9)$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية .
كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة t والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية v_0 في اللحظة $t=0$.

المرحلة الأولى :

من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي : $v_{i+1} = v_i + a_i \times \Delta t$ $v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i) \cdot \Delta t$ بحيث أن

$$a_i = A - B \cdot v_i^n$$

عند اللحظة $t=0$ لدينا $a_0 = A - Bv_0^n$

في المرحلة الثانية :

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$$

Δt تسمى خطوة الحساب

ونعيد حساب التسارع والسرعة المواليين بنفس الطريقة

التسارع	السرعة	اللحظة
$a_0 = A - B \times v_0^n$	v_0	$t_0 = 0$
$a_1 = A - B \times v_1^n$	$v_1 = v_0 + a_0 \times \Delta t$	$t_1 = t_0 + \Delta t$
$a_2 = A - B \times v_2^n$	$v_2 = v_1 + a_0 \times \Delta t$	$t_2 = t_1 + \Delta t$

ثم نبحث عن قيم n و A و B التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

استعمال طريقة أولير بواسطة البرنم Regressi :

- ننقر على أيقونة Euler

حساب k :

حساب السرعة الحدية :

من خلال الشكل يتبين أن السرعة الحدية $v_\ell = 1,23 \text{ m/s}$

في المعادلة التفاضلية :

تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

$$a = A - Bv^n \Rightarrow 0 = A - Bv_\ell^n$$

$$v_\ell^n = \frac{A}{B}$$

لدينا $B = \frac{k}{m}$ وبتعويض B في التعبير (1) نحصل على

$$B = \frac{A}{v_\ell^n} \Rightarrow \frac{k}{m_b} = \frac{A}{v_\ell^n}$$

$$k = m_b \cdot \frac{A}{v_\ell^n}$$

لنحسب A :

حساب كتلة السائل المزاح :

بما أن الكرة مغمورة كلياً في الماء فإن الحجم المزاح للسائل هو حجم الكرة : $\rho_f = \frac{m_f}{V_{\text{bille}}} \Rightarrow m_f = \rho_f V_{\text{bille}}$

$$V_{\text{bille}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0,860\text{cm}^3$$

وبالتالي فإن : $m_f = \rho_f V_{\text{bille}} = 1,07 \times 0,860 = 0,92\text{g}$

لدينا كذلك كتلة الكرة : $m_b = 6,88\text{g}$

$$A = 9,81 \left(\frac{m_b - m_f}{m_g} \right) = 8,49\text{m/s}^2$$

مبدأ المعالجة الرقمية بواسطة راسم المنحنيات Regressi :

نقوم بحساب السرعة v خلال مدد زمنية متتالية تساوي Δt تسمى خطوة الحساب نختار $\Delta t = 0,04\text{s}$

معرفة السرعة v_i في اللحظة t_i ، تكون المعادلة التفاضلية على الشكل التالي : $\left(\frac{dv}{dt} \right) [i] = A - Bv^n [i]$

نعلم أن التسارع في اللحظة t_i بطريقة تقريبية هو :

$$\left(\frac{dv}{dt} \right) [i] = \frac{v[i+1] - v[i]}{\Delta t} \Rightarrow v[i+1] = v[i] + \left(\frac{dv}{dt} \right) [i] \cdot \Delta t$$

$$v[i+1] = v[i] + (A - Bv^n [i]) \cdot \Delta t$$

$$v[i+1] = v[i] + A \left(1 - \frac{B}{A} v^n [i] \right) \cdot \Delta t$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{v_\ell^n} \Rightarrow v[i+1] = v[i] + A \left(1 - \frac{v^n [i]}{v_\ell^n} \right) \cdot \Delta t$$

$$v[i+1] = v[i] + A \left(1 - \left(\frac{v[i]}{v_\ell} \right)^n \right) \cdot \Delta t$$

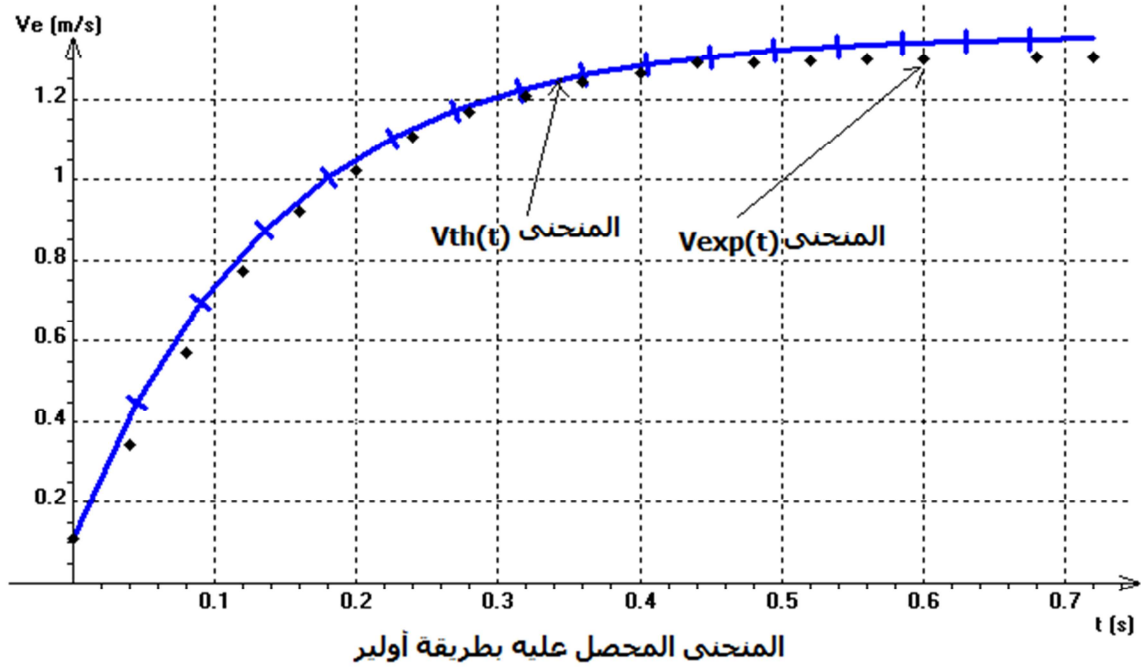
$$v[i] = v[i-1] + A \left(1 - \left(\frac{v[i-1]}{v_\ell} \right)^n \right) \cdot \Delta t$$

ندخل المعطيات في البرنم الراسم للمنحنيات فنحصل على المنحنى بالأزرق الموافق لطريقة أولير حيث $A=8,37\text{m/s}^2$ و $n=1$.

$$k = m_b \cdot \frac{A}{v_\ell} = 0,0436\text{SI} \quad \text{نحسب k}$$

$$B = \frac{k}{m_b} = 6,34\text{s}^{-1} \quad \text{ونحسب B}$$

تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب



تمارين حول السقوط الرأسي لجسم صلب

التمرين 1 : حساب دافعة أرخميدس

لدينا كرية (S) حجمها $V = 4,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ وكتلتها $m = 34 \text{ g}$. نأخذ شدة مجال الثقالة $g = 10 \text{ N / kg}$

1 - أحسب P وزن الكرية

2 - توجد الكرية في الهواء حيث كتلتها الحجمية $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg / m}^3$

2 - 1 أحسب F_A شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرية

2 - 2 قارن وزن الكرية وشدة دافعة أرخميدس (P / F_A)

3 - نجعل الكرية تسقط في سائل حيث كتلتها الحجمية $\rho_{\text{liq}} = 0,89 \text{ kg / m}^3$

3 - 1 أحسب F'_A شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرية

3 - 2 قارن وزن الكرية وشدة دافعة أرخميدس (P / F'_A)

التمرين 2 سقوط قطرة ماء في الهواء

خلال السقوط الرأسي لقطرة ماء حجمها V في الهواء ، يطبق عليها هذا الأخير ، بالإضافة إلى القوى الأخرى ، قوى احتكاك

تناسب اطرادا و متجهة السرعة \vec{v} : $\vec{f} = -k \times \vec{v}$. k معامل الاحتكاك المائع

نعتبر ρ_e الكتلة الحجمية للماء و ρ_a الكتلة الحجمية للهواء .

1 - ما هي وحدة k في النظام العالمي للوحدات ؟

2 - أوجد القوى المطبقة على القطرة

3 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أكتب التعبير المتجهي لمجموع القوى المطبقة على القطرة وعلاقته مع متجهة التسارع \vec{a}_G .

4 - أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v إحداثية السرعة على المحور Oz الموجه نحو الأسفل .

5 - بين أن القطرة تأخذ سرعة حدية v_ℓ خلال السقوط . عبر عن هذه السرعة بدلالة المعطيات .

6 - أحسب قيمتها

نعطي : $V = 4,2 \times 10^{-15} \text{ m}^3$; $\rho_e = 1,3 \text{ g / L}$; $k = 3,4 \times 10^{-9} \text{ kg / s}$; $g = 9,8 \text{ m / s}^2$

التمرين 3 : سقوط كرية من البلاستيك في الزيت

نطلق رأسيًا في مخبر مملوء بالزيت انطلاقًا من سطحه الحر كرية من البلاستيك ، قطرها $d = 1 \text{ cm}$ وكتلتها $m = 0,52 \text{ g}$.

1 - أ - بين أن الكرية ستغمر كليًا في الزيت حيث الكتلة الحجمية لهذا الأخير $\rho_h = 900 \text{ kg / m}^3$.

نعطي تعبير حجم كرية شعاعها r : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

ب - أوجد القوى المطبقة على الكرية خلال سقوطها وحددا مميزاتها .

2 - تعبير قوة الاحتكاك المائع المطبقة على الكرية خلال سقوطها الرأسي في الزيت هو : $f = k \times v$ بحيث أن v السرعة

اللحظية و k معامل تعبيره $k = 3\pi \eta \times d$ ، حيث $\eta = 80 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ ويمثل لزوجة الزيت .

2 - 1 أثبت أن تعبير المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v خلال حركة الكرية يكتب على الشكل التالي :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \times v = g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_p} \right)$$

2 - 2 كيف تعلق أن الكرية تأخذ قيمة حدية خلال سقوطها في الزيت ؟

2 - 3 بين أن حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي : $v = A(1 - e^{-Bt})$ تحدد الثابتين A و B

3 - بعد 40 ms تبقى قيمة سرعة الكرية $v_\ell = 30 \text{ mm / s}$

3 - 1 أوجد القوى المطبقة على الكرية في هذه الحالة

3 - 2 ما هي رتبة القدر للزمن المميز لهذه الحركة ؟

التمرين 4 استعمال طريقة أولبير

نطلق كرية حجمها V وكتلتها الحجمية ρ بدون سرعة بدئية في مائع كتلتها الحجمية ρ' ($\rho' < \rho$)

تعبير متجهة قوة الاحتكاك المائع $f = k \times v^2$ ، بحيث أن v سرعة الكرية في المائع خلال حركتها الرأسية في المائع نوجه

المحور الرأسي Oz موجه نحو الأسفل .

1 - حدد منحى حركة الكرية

2 - بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الكرية تكتب على الشكل التالي :

تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسى لجسم صلب

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \times v^2 + \beta$$

3 - لحل هذه المعادلة يمكن استعمال طريقة أولير ، ذكر بمبدأ هذه العملية

4 - خلال حصة تجريبية - توصل التلاميذ إلى النتائج التالية : $\alpha = -3,00\text{m}^{-1}$ و $\beta = 10,0\text{m/s}^2$ والجدول أسفله

t(s)	0	0,040	0,080	0,120	0,160	0,200	0,240
v(m/s)	0,000	0,400	0,781		1,360	1,538	1,654
a(m/s ²)	10			6,319	4,448	2,901	1,789

4 - 1 أتمم الجدول أعلاه

4 - 2 ما قيمة السرعة الحدية ؟

التمرين 5 : السقوط الرأسى لجسم صلب (Bac 2010)

يخضع كل جسم صلب مغموء في مائع إلى دافعة أرخميدس ، وإذا كان هذا الجسم في حركة إزاحة داخل المائع فإنه يخضع كذلك إلى قوة احتكاك مائع . يهدف هذا التمرين إلى دراسة تطور سرعة كرتين (a) و (b) من الزجاج متجانستين ليس لهما نفس الشعاع ، توجدان في حركو إزاحة داخل زيت بسرعة نسبيا صغيرة . معطيات :

الكتلة الحجمية للزجاج : $\rho = 2600\text{kg/m}^3$ ؛

الكتلة الحجمية للزيت : $\rho_0 = 970\text{kg/m}^3$ ؛

لزوجة الزيت : $\eta = 8,00 \times 10^{-2} \text{N.m}^{-2} \cdot \text{s}$ ؛

تسارع الثقالة : $g = 9,81\text{m/s}^2$ ؛

تعبير حجم كرية شعاعها r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ؛

نحزر ، عند اللحظة $t = 0$ ، الكرتين (a) و (b) عند سطح الزيت الموجود في أنبوب شفاف أسطوانى رأسى .

ارتفاع الزيت في الأنبوب هو $H = 1,00\text{m}$. الشكل (1)

1 - دراسة حركة الكرية (a) .

ندرس حركة الكرية في معلم (O, \vec{i}) المرتبط بالأرض . نخضع الكرية أثناء حركتها داخل الزيت إلى :

- دافعة أرخميدس $\vec{F} = -\rho_0 \cdot V \cdot g \cdot \vec{i}$ ؛

- قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot \vec{i}$ حيث v سرعة الكرية ؛

- وزنها $\vec{P} = m\vec{g}$.

نرمز للزمن المميز لحركة الكرية (a) ب τ ؛ ونعتبر أن سرعة الكرية تبلغ القيمة الحدية v_ℓ بعد تمام المدة الزمنية 5τ .

1 - 1 أثبت المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ لحركة الكرية (a) مع تحديد تعبير الثابتين C و τ . احسب τ علما أن $r = 0,25\text{cm}$.

1 - 2 احسب قيمة السرعة الحدية v_ℓ للكرية (a) .

2 - دراسة مقارنة لحركتي الكرتين (a) و (b)

شعاع الكرية (b) هو $r' = 2r$

2 - 1 حدد ، معللا جوابك ، الكرية التي ستستغرق أطول مدة زمنية لتبلغ سرعتها الحدية .

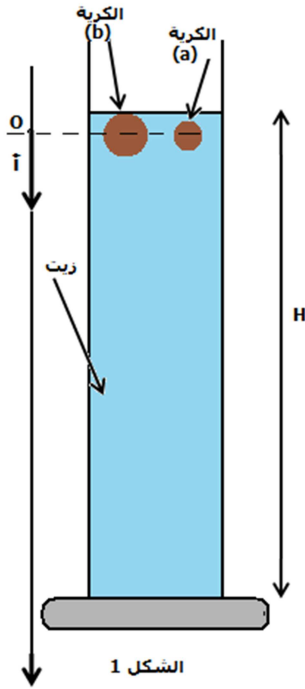
2 - 2 خلال النظام الانتقالي تقطع :

- الكرية (a) المسافة $d_1 = 5,00\text{cm}$ ؛

- الكرية (b) المسافة $d_2 = 80\text{cm}$.

نهمل شعاعي الكرتين r و r' أمام ارتفاع الزيت H .

احسب المدة الزمنية الفاصلة بين وصول الكرتين (a) و (b) إلى قعر الأنبوب .

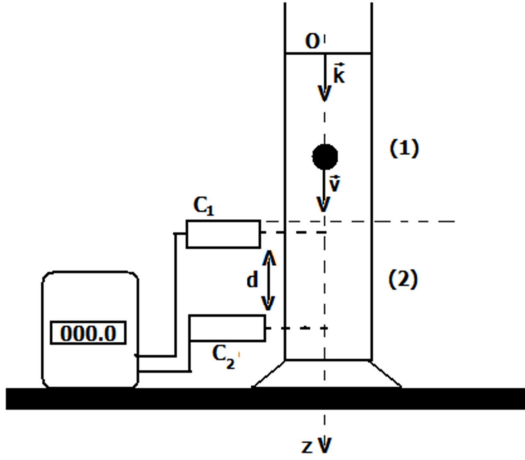


الشكل 1

تطبيقات قوانين نيوتن : السقوط الرأسي لجسم صلب

التمرين 6 (Bac 2008)

بهدف هذا التمرين إلى نمذجة قوة الاحتكاك المائع المطبقة من طرف الغليسيرول على جسم صلب وذلك بدراسة حركة السقوط الرأسي لكلمة فليزية كتلتها m وشعاعها r داخل الغليسيرول .
معطيات :



– شعاع الكلمة : $r = 1\text{cm}$ ؛ حجم الكلمة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

– الكلمة الحجمية :

للفلز الذي تتكون منه الكلمة : $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$

الغليسيرول : $\rho_2 = 1,26 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$

– تسارع الثقاله : $g = 9,81 \text{m/s}^2$

نذكر أن شدة دافعة أرخميدس المطبقة على الكلمة المغمورة كلياً

في الغليسيرول هي : $F = \rho_2 V g$.

نمذج قوة الاحتكاك التي تخضع لها الكلمة أثناء السقوط داخل

الغليسيرول بـ $\vec{f} = -9\pi r^n \vec{k}$ حيث n عدد صحيح و v سرعة مركز

قصور الكلمة .

عند لحظة نعتبرها أصلاً للتواريخ $(t_0 = 0)$ ، نحرر الكلمة بدون سرعة بدئية من نقطة O أصل المحور الرأسي (O, \vec{k}) الموجه نحو

الأسفل ، فتم حركتها داخل الغليسيرول الموجود في إناء زجاجي ، على مرحلتين :

(1) : مرحلة النظام البدئي بين لحظتين t_0 و t_1 حيث تتزايد سرعة الكلمة .

(2) : مرحلة النظام الدائم انطلاقاً من اللحظة t_1 حيث تأخذ سرعة الكلمة قيمة حدية ثابتة v_ℓ .

يمكن الجهاز المكون من ميقت وخليتين (C_1) و (C_2) من قياس المدة الزمنية Δt التي تستغرقها الكلمة لقطع المسافة

$d = 20\text{cm}$ خلال المرحلة (2) أنظر الشكل جانبه

1 – حدد قيمة السرعة الحدية v_ℓ علماً أن $\Delta t = 956\text{ms}$.

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v لمركز قصور الكلمة داخل السائل تكتب

على الشكل :

$$B = g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right) \text{ و } A = \frac{27}{4\rho_1 r^2} \text{ مع } \frac{dv}{dt} + Av^n = B$$

3 – أوجد انطلاقاً من المعادلة التفاضلية ، تعبير v_ℓ^n بدلالة g, r, ρ_1, ρ_2 .

4 – استنتج العدد n .

VI - السقوط الرأسي الحر .

1 - تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط . نظريا يكون السقوط حرا إذا تم في الفراغ ، ويمكن اعتبار سقوط جسم في الهواء حرا إذا كانت كثافته عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .

2 - متجهة التسارع a_G لمركز القصور .

نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \vec{a}_G$ أي أن $\vec{g} = \vec{a}_G$

3 - المعادلة الزمنية للحركة

في المعلم (O, \vec{k}) الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على : $a_z = g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g \Rightarrow v_z = gt + C$ نحدد الثابتة C بالشروط

البديئية . نأخذ عند اللحظة $t_0=0$ أن $v_G(t=0) = v_0 = 0$ أي أن $v_z = gt$ ونستنتج أن سرعة G دالة زمنية خطية .

بنفس الطريقة نبحث عن $z(t)$:

نحدد كذلك الثابتة C' بالشروط البديئية . نأخذ عند اللحظة $t=0$ أن $z(0)=z_0=0$ وبالتالي فإن

$C'=0$ أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة بديئية ومن النقطة O تم اختيارها كأصل معلم

الزمن هي : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

وهذه المعادلة نعممها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بديئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

التمرين 1 :

I - تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بديئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ محوره

(O, \vec{k}) رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 - ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟

2 - أوجد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟

3 - عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .

4 - أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي $h=2m$.

II - السرعة البديئية في اللحظة $t=0$ لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي $v_0=15,0m/s$

1 - اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي (O, \vec{k}) موجه نحو الأعلى للمعلم المتعامد والممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2 - أوجد تعبير t_M تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى z_M للنقطة G ، واحسب قيمته .

3 - أحسب قيمة z_M .

التمرين 2 : تحديد عمق بئر

لتحديد العمق H لبئر ، نسقط رأسيا حجرة من فتحة البئر بدون سرعة بديئية . المدة الزمنية المستغرقة بين لحظة انطلاق

سقوط الحجرة و اللحظة التي سمع فيها اصطدام الحجرة بالقعر البئر هي $\Delta t = 4,50s$

نعطي سرعة الصوت في الهواء $V_{son} = 330m/s$ و $g = 9,80m/s^2$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن تعبير العمق H يكتب على الشكل التالي :

$$H = \frac{V_{son}^2}{g} \left(1 + \frac{g\Delta t}{V_{son}} - \sqrt{1 + \frac{2g\Delta t}{V_{son}}} \right)$$

أحسب العمق H للبئر .