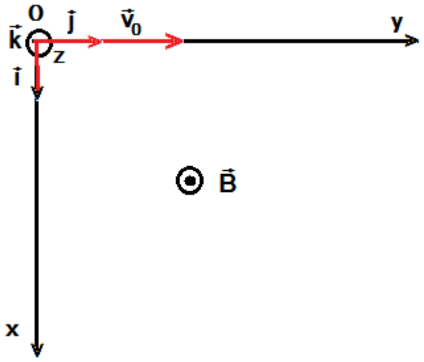
تصحيح التمرين 4

1 ـ المعادلة التفاضلية التي تحققها $y(t)$:



دراسة حركة في المعلم $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مرتبط بمرجع أرضي والذي نعتبره غاليليا

تخضع الدقيقة إلى القوى التالية :

وزن الدقيقة والطي نعتبر شدته مهملة أمام شدة القوة المغنطيسية

القوة المغنطيسية $\vec{F}$

حسب القانون الثاني لنيوتن : $\vec{F}=m\vec{a}$ بحيث أن $\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ باعتبار أن

$q\vec{v}=q\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$ و $\vec{B}=B\vec{k}$ و بالتالي وحسب الجداء المتجهي فإن

$\vec{F}=qBv_y\vec{i}-qBv_x\vec{j}+0\vec{k}$ ومنه فإن فإن المعادلات التفاضلية للحركة الدقيقة :

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{q}{m}B\dfrac{dy}{dt} & (1)\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{q}{m}B\dfrac{dx}{dt} & (2)\\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2}=0\end{cases}$$

من المعادلة (1) وبالتكامل : $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{q}{m}By+C_1$ ، عند اللحظة $t=0$ $v_x=0$ وبالتالي فإن $C_1=0$

ومنه فإن $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{q}{m}By$ وحسب المعادلة (2) لدينا y $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\left(\dfrac{q}{m}B\right)^2$ أي أن $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+\left(\dfrac{q}{m}B\right)^2y=0}$

2 ـ حل المعادلة التفاضلية :

حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي : $y(t)=Y_m\cos(\omega t+\varphi)$

الحل يحقق المعادلة التفاضلية : $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2Y_m\cos(\omega t+\varphi)$ أي أن $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y(t)$ ومنه فإن $\omega^2=\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2$ أي أن $\boxed{\omega=\dfrac{qB}{m}}$

تحديد Y_m و φ :

عند اللحظة $t=0$ لدينا $\vec{v}=v_0\vec{j}$ و $y_0=0$ ومنه فإن $Y_m\cos\varphi=0$ و $-Y_m\omega\sin\varphi=v_0$ أي أن $\varphi=\pi/2$ أو $\varphi=-\pi/2$

وبما أن $v_0>0$ و $\omega>0$ و $Y_m>0$ فإن $\sin\varphi<0$ أي أن $\boxed{\varphi=-\pi/2}$ و $\boxed{Y_m=v_0/\omega}$

أي أن $\boxed{y(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$

3 ـ تعبير $x(t)$:

لدينا حسب السؤال الأول أن $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{q}{m}By=\dfrac{qB}{m}\times\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ ومنه بالتكامل : $x=\dfrac{qBv_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)+C_2$ وعند $t=0$ فإن

$x=0\Rightarrow C_2=\dfrac{qv_0B}{m\omega^2}=\dfrac{v_0}{\omega}$ ومنه فإن $\boxed{x(t)=\dfrac{v_0}{\omega}(1-\cos(\omega t))}$

4 ـ تحديد $z(t)$: لدينا $a_z=0$ أي أن $v_z=C_3=0$ ومنه فإن $z=C_4=0$ أي أن $z(t)=0$ ، حركة الدقيقة في المجال المغنطيسي $\vec{B}$ مستوية في المستوى Oxy

معادلة المسار :

$$\begin{cases}X=\left(x-\dfrac{v_0}{\omega}\right)=-\dfrac{v_0}{\omega}\cos(\omega t)\\[2mm] Y=y=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\\[2mm] Z=z=0\end{cases}$$

أي أن $\boxed{X^2+Y^2=\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$ أي أن مسار الدقيقة عبارة عن دائرة شعاعها $\boxed{R=\dfrac{v_0}{\omega}}$ و مركزها $\boxed{O\left(\dfrac{v_0}{\omega},0\right)}$

ومتجهة السرعة : $\begin{cases}\dot{x}=v_0\sin\omega t\\ \dot{y}=v_0\cos\omega t\\ \dot{z}=0\end{cases}$ ومتجهة التسارع هي : $\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}=v_0\omega\cos\omega t\\ \ddot{y}=-v_0\omega\sin\omega t\\ \ddot{z}=0\end{cases}$

التمرين إضافي*:**

نعتبر مضلي ولوازمه في سقوط رأسي في الهواء قبل فتح مضلته .

نفترض أن قوة الاحتكاك المائع التي تخضع لها المجموعة { المضلي + المضلة مغلقة } تعبيرها كالتالي $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

بحيث أن $\vec{v}$ سرعة المجموعة خلال السقوط و $\lambda = 14SI$ ثابتة .

عند اللحظة t_0 يفتح المضلي مضلته . باعتبار أت فتح المضلة يكون لحظيا وأن المضلي يصل السرعة الحدية للسقوط قبل فتح المضلة . نفترض أن قوة الاحتكاك المائع التي تخضع لها المجموعة في هذه الحالة هي : $-\mu\vec{v}$ حيث $\mu = 350SI$,

1 ـ حدد وحدتي λ و μ في النظام العالمي للوحدات .

2 ـ ما هي السرعة الحدية v_0 لسقوط المضلي قبل فتح مضلته ؟

3 ـ ماهي السرعة الحدية الجديد v_1 للسقوط عندما يفتح المضلي مضلته ؟

4 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على المجموعة أكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها $u(t) = v(t) - v_1$.

5 ـ أوجد حل هذه المعادلة التفاضلية واستنتج منحنى $v(t)$ بدلالة الزمن بالنسبة ل $t > t_0$

نعطي : كتلة المجموعة { المضلي + المضلة مغلقة } : $m = 70kg$ شدة وجال التقالة : $g = 10m/s^2$

الحل :

1 ـ باستعمال معادلة الأبعاد بحيث أن القوة f وحدتها في النظام العالمي للوحدات $kg.m/s^2$ والسرعة v وحدتها m/s

وبالتالي فإن وحدة λ و μ هي $\boxed{[\lambda] = [\mu] = kg/s}$

2 ـ عند وصول المضلي إلى سرعته الحدية في كلتا الحالتين : $\lambda v_0 = mg$ أي أن $\boxed{v_0 = \dfrac{mg}{\lambda}}$ أي أن $v_0 = 50m/s = 180km/h$

3 ـ $\mu v_1 = mg$ أي أن $\boxed{v_1 = \dfrac{mg}{\mu}}$ أي أن $v_1 = 2m/s = 7,20km/h$

4 ـ نطبق القانون الثاني لنيوتن في مرجع مرتبط بسطح الأرض والذي نعتبره غاليليا

تخضع المجموع إلى القوى التالية : وزن المجموعة $\vec{P}$ وقوة الاحتكاك الهواء $f = \mu v$ ونهمل قوة دافعة ارخميدس

$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$ باختيار محور Oz موجه نحو الأسفل بحيث نسقط عليه العلاقة المتجهية : $mg - \mu v = ma_G$ وبالتالي فإن

$\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{\mu}{m}v$ ونعلم أن $g = \dfrac{\mu v_1}{m}$ أي أن $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mu v_1}{m} - \dfrac{\mu}{m}v$ ، نضع $u = v(t) - v_1$ أي أن $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{dv}{dt}$ أي أن $\boxed{\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\mu u}{m} = 0}$

5 ـ حل المعادلة التفاضلية هو : $u(t) = u_0 \exp\left(-\dfrac{\mu}{m}t\right)$ وحسب الشروط البدئية عند $t = 0$ لدينا $u(0) = v(0) - v_1 = v_0 - v_1$

وبالتالي يصبح الحل : $u(t) = v(t) - v_1 = (v_0 - v_1)\exp\left(-\dfrac{\mu}{m}t\right)$ أي أن $\boxed{v(t) = (v_0 - v_1)\exp\left(-\dfrac{\mu}{m}t\right) + v_1}$