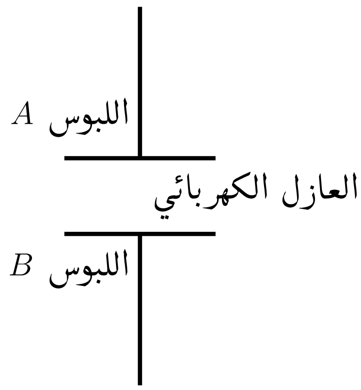
ثنائي القطب RC

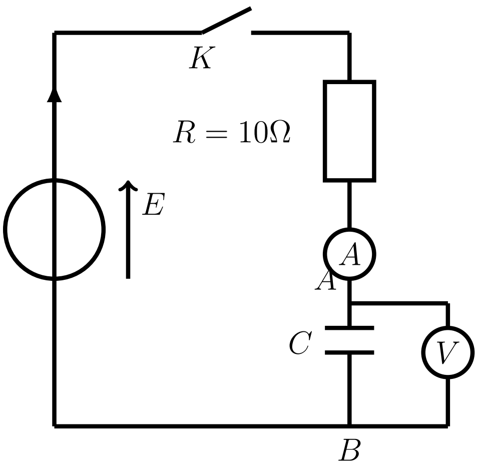
I المكثف

1 ـ تعريف ورمز المكثف .

المكثف ثنائي قطب ، يتكون من موصلين متقابلين ، نسميهما لبوسين ، يفصل بينهما عازل استقطابي

رمز المكثف :





2 ـ شحنتا اللبوسين ـ شحنة المكثف

دراسة تجريبية :

العلاقة بين شحنتي لبوسي المكثف

ننجز التركيب الممثل في الشكل جانبه

نغلق قاطع التيار بعد أن تم إفراغ المكثف بوصل مربطيه بمربطي موصل أومي مناسب لمدة ثانية واحدة على الأقل.

استثمار

1 ـ علما أن الشحنة الكهربائية تنحفظ ، ما العلاقة التي تربط بين الشحنتين q_A و q_B عند كل لحظة ؟

بما أن الشحنة تنحفظ فإن $q_A + q_B = 0$ أي أن $q_A = -q_B$

خلاصة

تحقق q_A و q_B شحنتا لبوسي المكثف ، في كل لحظة العلاقة : $q_A = -q_B$.

تعريف

شحنة المكثف أو كمية الكهرباء المخزونة في مكثف هي شحنة اللبوس الموجب للمكثف . ونرمز لها ب Q ووحدتها الكولوم (C) $Q = +q_A = -q_B$

3 ـ العلاقة بين الشحنة وشدة التيار .

نختار منحى موجبا لشدة التيار حيث يدخل من اللبوس A :

ـ عندما يمر التيار في المنحى المختار فإن $i > 0$

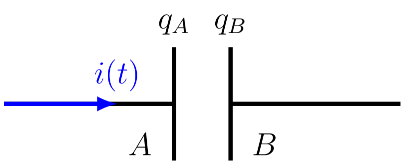
ـ عندما يمر التيار في المنحى المعاكس فإن $i < 0$

إن كمية الكهرباء تتغير في اللبوسين بنفس المقدار وبإشارتين مختلفتين . إذن خلال مدة زمنية جزئية أي متناهية في الصغر dt، تتغير شحنة اللبوس A ب dq_A وشحنة اللبوس B ب dq_B بحيث أن

$$dq_A = -dq_B$$

نعرف شدة التيار $i(t)$ هي كمية الكهرباء dq_A التي ازدادت في اللبوس A خلال المدة الزمنية dt :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq_A}{dt}}$$



$i(t)$: موجهة نحو اللبوس A
الوحدات : q_A بالكولوم C
t بالثانية s
$i(t)$ بالأمبير A

تزايد q_A : $\frac{dq_A}{dt} > 0$ أي أن $i(t) > 0$
و تناقص q_A : $\frac{dq_A}{dt} < 0$ أي أن $i(t) < 0$

4 ـ العلاقة بين الشحنة والتوتر

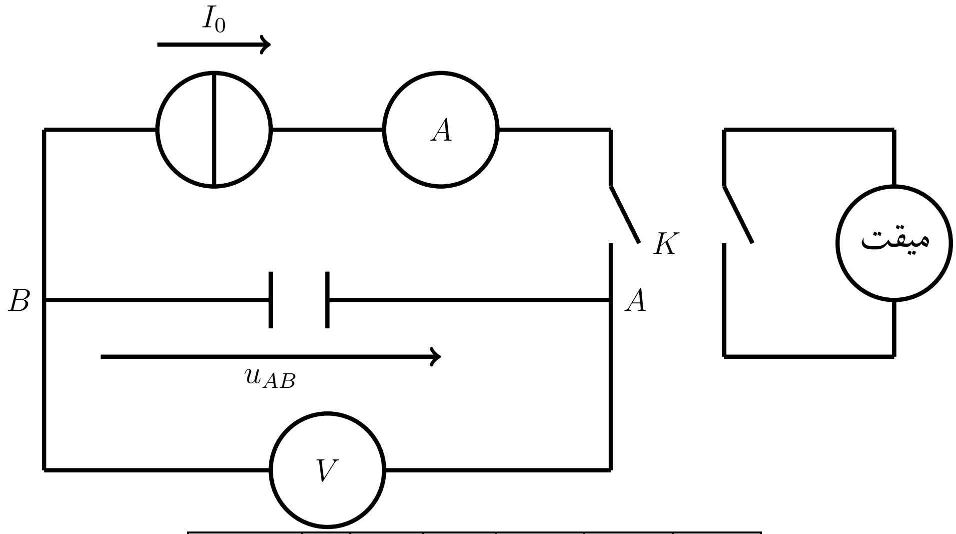
دراسة تجريبية

ننجز التركيب الممثل في الشكل أسفله .

يعطي المولد المؤمثل للتيار تيارا كهربائيا شدته $I_0 = 100mA$.

نغلق قاطع التيار بعد أن تم إفراغ المكثف بوصل مربطيه بمربطي موصل أومي مناسب لمدة ثانية واحدة على الأقل .

نغلق قاطع التيار الذي يشغل الميقت كذلك . ثم نقيس التوتر u_{AB} بين مربطي المكثف كل أربع ثوان تقريبا. فنصل على النتائج المسجلة في الجدول أسفله



u_{AB}	0	2	4	6	8	10
$t(s)$	0	4.3	8.6	12.9	17.1	21.4
$q_A(C)$						

استثمار

1 ـ بين أنه في لحظة t يكتسب المكثف الشحنة :

$$q_A = I_0.t$$

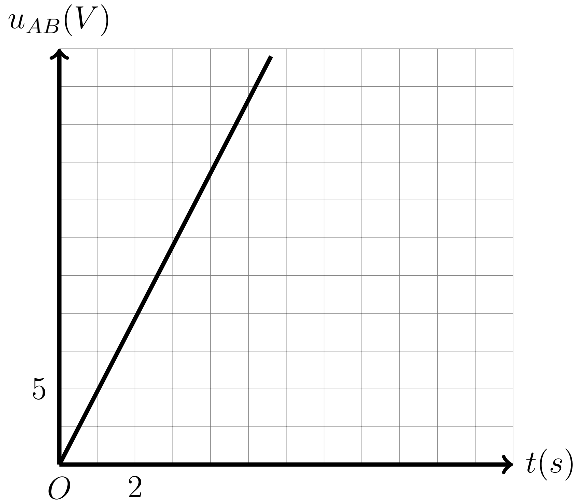
بما أن المولد يعطي تيارا شدته ثابتة I_0 ، فإن حسب المعطيات I_0

$I_0 = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ أي أن $I_0 = \dfrac{q_A}{t}$ ومنه فإن $q_A = I_0.t$.

u_{AB}	0	2	4	6	8	10
$t(s)$	0	4.3	$8.6u$	12.9	17.1	21.4
$q_A(C).10^{-4}$	0	$4,3$	$8,6$	12.9	$17,1$	$21,4$

2 ـ مثل المنحنى $q_A = f(u_{AB})$ باختيار سلم ملائم .

استثمار



3 ـ ما هو شكل المنحنى المحصل عليه ؟ أكتب معادلته الرياضية . ما هو المدلول الفيزيائي للمعامل الموجه لهذا المنحنى ؟ ما هي وحدته في النظام العالمي للوحدات ؟

شكل المنحنى عبارة عن مستقيم يمر من O معادلته الرياضية تكتب على الشكل التالي :

$$q_A = C.u_{AB}$$

، C المدلول الفيزيائي للمعامل الموجه يمثل سعة المكثف ونرمز لها ب C

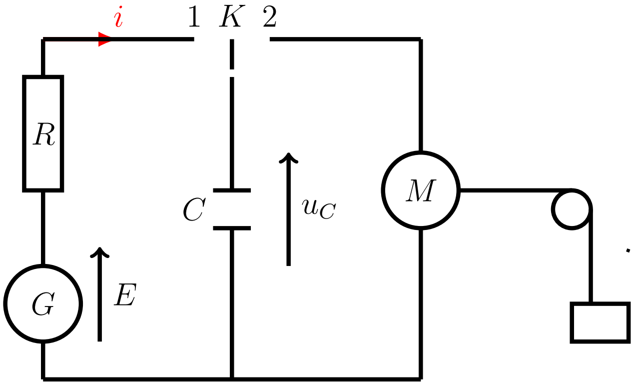
العلاقة الرياضية تصبح :

$$\boxed{q_A = C.u_{AB}}$$

خلاصة

$$\boxed{q = C.u_C \Rightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}}$$

II تعبير الطاقة المخزونة في المكثف



ـ الإبراز التجريبي للطاقة المخزونة في المكثف

نعتبر التركيب التجريبي الممثل في الشكل أسفله :
نقوم بشحن المكثف بواسطة مولد التوتر المستمر .
نرجح قاطع التيار K إلى الموضع 2
ماذا نلاحظ ؟

عندما نؤرجح قاطع التيار في الموضع 2 ، نلاحظ اشتغال المحرك وصعود الكتلة المعلقة بواسطة خيط ملفوف على مجرى بكرة تدور حول مرود المحرك .
يفسر صعود الكتلة نتيجة الطاقة الميكانيكية المكتسبة من طرف المحرك والذي اكتسبها بدوره من المكثف والذي خزنها على شكل طاقة كهربائية أثناء شحنه .

استنتاج
يخزن المكثف الطاقة الكهربائية قصد استعمالها عند الحاجة .

تعبير الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف

القدرة الكهربائية الممنوحة من طرف المولد للمكثف هي :
$\mathscr{P} = u_C.i(t)$

بحيث أن $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ وبالتالي فإن

$$\mathscr{P} = C.u_C\frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Cu_C^2)$$

ونعلم أن القدرة الكهربائية $\mathscr{P} = \dfrac{d\mathscr{E}_e}{dt}$ ومنه فإن :

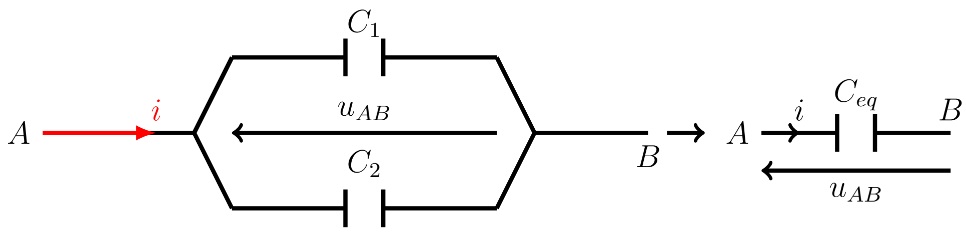
$$\boxed{\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C.u_C^2}$$

أهمية المكثف في الحياة العامة

خاصية تخزين الطاقة الكهربائية بواسطة مكثف وإمكانية استرجاعها عند الحاجة تمكن من استعماله في عدة أجهزة مثال الذاكرة المتطايرة الدينامية RAM للحاسوب ، التغذية الكهربائية المستمرة والمثبتة ، الأجهزة الفوتوغرافية حيث تمكن الطاقة المخزونة في المكثف من تشغيل مصباح الوماض .

III ـ تجميع المكثفات

1 ـ التركيب على التوازي



q_A شحنة اللبوس A ذي السعة C_1

q_B شحنة اللبوس B ذي السعة C_2

q_{eq} شحنة اللبوس A للمكثف المكافئ ذي السعة C_{eq}

$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow q_{eq} = q_A + q_B$$

$$q_{eq} = C_1.u_{AB} + C_2.u_{AB}$$

$$q_{eq} = C_{eq}.u_{AB} \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$$

يمكن تعميم هذه النتيجة بالنسبة لمكثفات مركبة على التوازي عددها n :

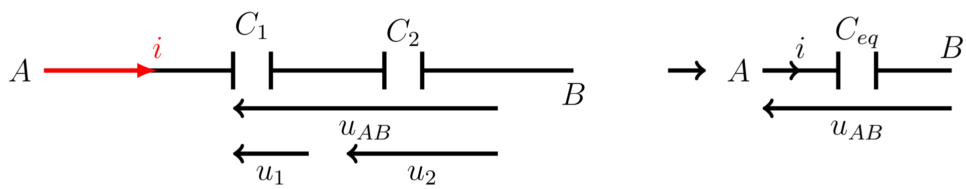
$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=0}^{n} C_i}$$

فائدة التركيب على التوازي :

ـ تضخيم السعة عند تطبيق توتر ضعيف .

ـ يمكن ، بتطبيق توتر ضعيف ، من الحصول على شحنة كهربائية كبيرة قد لا يوفرها كل مكثف على حدة .

2 ـ التركيب على التوالي



q_A شحنة اللبوس A ذي السعة C_1

q_B شحنة اللبوس B ذي السعة C_2

يمر في الفرع AB نفس التيار : $i = i_1 = i_2$ أي أن $q_A = q_B = q$

نطبق قانون إضافية التوترات بين A و B :

$$u_{AB} = u_1 + u_2$$

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q_A}{C_1} + \frac{q_B}{C_2}$$

$$q_A = q_B = q \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

يمكن تعميم هذه النتيجة بالنسبة لمكثفات مركبة على التوالي عددها n :

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

فائدة التركيب على التوالي :

يمكن من الحصول على سعة قيمتها صغيرة جدا ، مع تطبيق توترا جد عالي قد لا يتحمله كل مكثف على حدة ، بينما يبقى التوتر المطبق بين كل مكثف معتدلا.

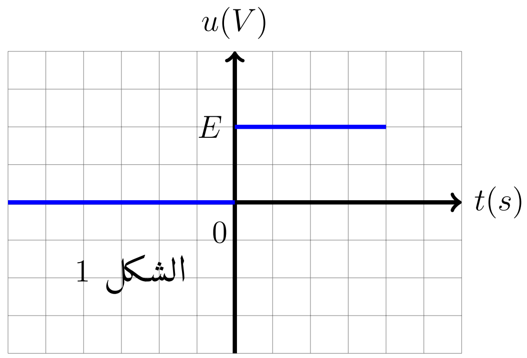
IV استجابة ثنائي القطب RC لرتبة توتر

1 ــ تعاريف

رتبة توتر هي إشارة كهربائية $u(t)$ ونميز بين :

*رتبة صاعدة للتوتر ومعادلتها هي :

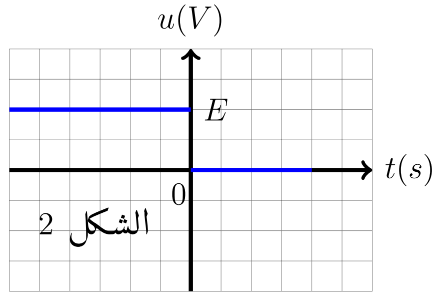
بالنسبة ل $t \leqslant 0$: $u(t) = 0$ و بالنسبة ل $t > 0$: $u(t) = E$ الشكل 1



الشكل 1

* رتبة نازلة للتوتر ومعادلتها هي :

بالنسبة ل $t \leqslant 0$: $u(t) = E$ و بالنسبة ل $t > 0$: $u(t) = 0$ الشكل 2

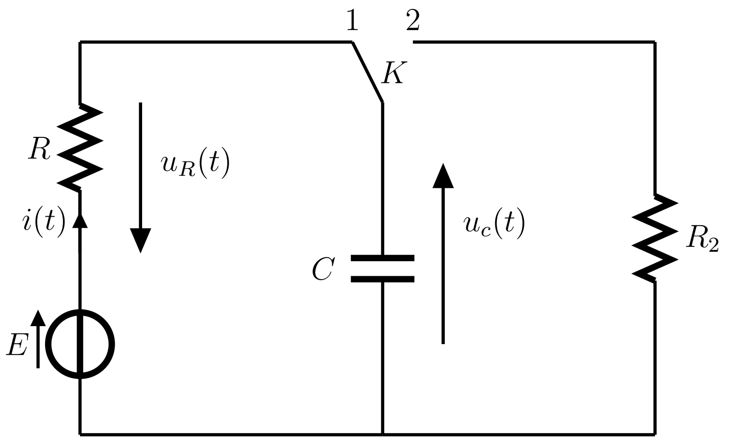


الشكل 2

2 ــ استجابة ثنائي القطب RC لرتبة توتر صاعدة

أ ــ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C

نعتبر الدارة الكهربائية الممثلة في الشكل 3



الشكل 3

عند اللحظة $t=0$ والتي نعتبرها كأصل للتواريخ نضع قاطع التيار في الموضع 1 . يغذي المولد الدارة بتوتر u_t وهي رتبة توتر صاعدة .

حسب قانون إضافية التوترات لدينا :

$$E = u_{R_1} + u_C$$

وحسب قانون أوم $u_R = R_1.i = R_1C\dfrac{du_C}{dt}$

$$\boxed{R_1C\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

ب ـ حل المعادلة التفاضلية

حل هذه المعادلة التفاضلية هو على الشكل التالي :

$$u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$$

بحيث أن A و B و α ثوابت يمكن تحديدها

بتعويض هذا الحل في المعادلة التفاضلية ، نحدد الثابتة α والثابتة B .

$$R_1C\frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow R_1C(-\alpha Ae^{-\alpha t} + Ae^{-\alpha t} + B = E$$

$$\Leftrightarrow Ae^{-\alpha t}(1 - R_1C\alpha) + B = E$$

ومنه فإن :

$$1 - R_1C\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{R_1C}$$

$$B = E$$

وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{R_1C}} + E$$

وباعتبار الشروط البدئية عند $t=0$ لدينا $u_C(0)=0$ نحدد الثابتة A وهذا لكون الدالة متصلة في أي لحظة t من لحظات تشغيل المكثف بما فيها اللحظة $t=0$:

$$u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = 0 \Longrightarrow u_C(0) = A + E \Longrightarrow A = -E$$

وبالتالي فإن الحل يكتب على الشكل التالي :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

بحيث أن $\tau = R_1C$ وتسمى ثابتة الزمن للدارة RC

ج ـ وحدة τ في النظام العالمي للوحدات :

حسب معادلة الأبعاد لدينا :

$$[\tau] = [R].[C]$$

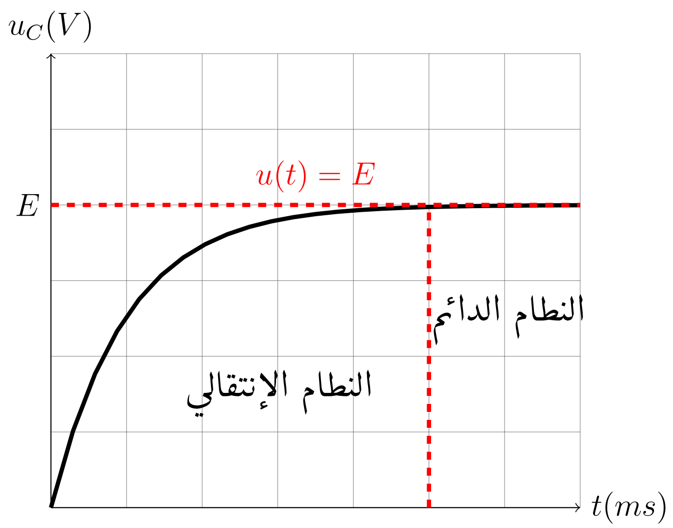
من جهة أخرى أن $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$ و $[C] = \dfrac{[I]}{[U]}.[t]$ ومنه فإن

$$\boxed{[\tau] = [t]}$$

المقدار τ له بعد زمني . نسميه بالثابتة الزمن لثنائي القطب RC ، وحدته هي : الثانية s .

د ـ المنحنى الممثل ل $u_C = f(t)$

رياضيا شكل المنحنى هو كالتالي ، بحيث أنه عند $t = 0$ لدينا $u_C(0) = 0$ وعندما $t \longmapsto \infty$ فإن $u_C(\infty) = E$ أن $t > 5\tau$ وعمليا نعتبر $u_c = E$



يبرز المنحنى وجود نظامين :

نظام انتقالي : يتغير خلاله التوتر $u_C(t)$

نظام دائم : يصل خلاله التوتر إلى قيمة حدية ثابتة E .

ه ـ طرق تحديد ثابتة الزمن τ

الطريقة الأولى :

باستعمال حل المعادلة التفاضلية :

$$u_C(t = \tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E$$

τ هو الأفصول الذي يوافق الأرتوب $0,63E$

الطريقة الثانية : استعمال المماس عند اللحظة $t = 0$

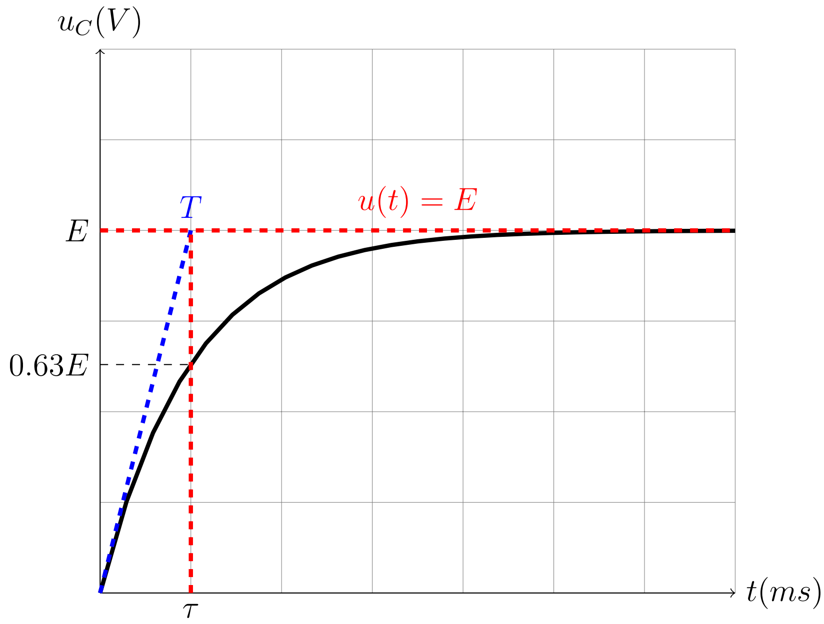
لدينا : $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ أي أن $\left(\dfrac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = \dfrac{E}{\tau}$

إذن معادلة المماس :

$$u_C(t) - u_C(0) = \frac{E}{\tau}.(t - t_0)$$

$$u_C(t)=\frac{E}{\tau}.t$$

إذن عند اللحظة $t=\tau$ فإن $u_C(t)=E$ أي أن تقاطع المقارب للمنحنى $u_C=E$ و المماس للمنحنى عند اللحظة $t=0$ تعطي $t=\tau$



و ـ تعبير شدة تيار الشحن $i(t)$

نعلم أن شدة تيار الشحن : $i(t)=C\frac{du_C}{dt}$ حيث

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{E}{R_1C}e^{-t/\tau}$$

إذن :

$$i(t)=\frac{CE}{R_1C}.e^{-t/\tau}$$

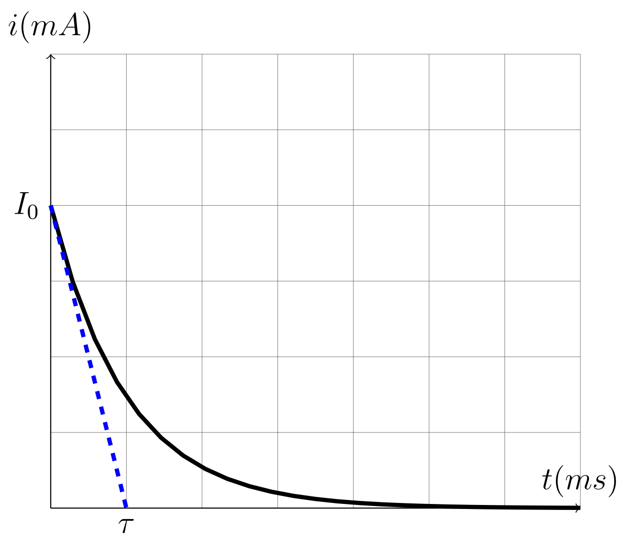
$$\boxed{\frac{E}{R_1}e^{-t/\tau}}$$

حيث تمثل E/R_1 شدة التيار عند اللحظة $t=0$

أي أن $t=0$ لدينا $u_C=0$ ومنه $E=R_1.I_0$ أي

أن $I_0=\frac{E}{R_1}$

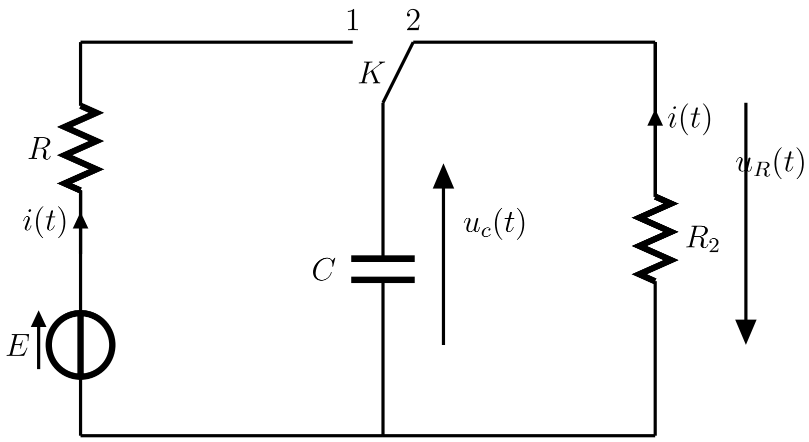
$$\boxed{i(t)=I_0e^{-t/\tau}}$$



2 ـ استجابة ثنائي القطب RC لرتبة توتر نازلة

أ ـ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C

نعتبر الدارة الكهربائية الممثلة في الشكل 4



الشكل 4

بعد شحن المكثف نضع قاطع التيار في الموضع 2 والتي نعتبرها كأصل للتواريخ $t = 0$ حيث سيستجيب إلى رتبة نازلة للتوتر .

أ ـ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C

حسب قانون إضافية التوترات لدينا :

$$u_{R_2} + u_C = 0$$

وحسب قانون أوم $u_R = R_2.i = R_2C\dfrac{du_C}{dt}$

$$\boxed{R_2C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0}$$

ب ـ حل المعادلة التفاضلية

حل هذه المعادلة التفاضلية هو على الشكل التالي :

$$u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$$

بحيث أن A و B و α ثوابت يمكن تحديدها

بتعويض هذا الحل في المعادلة التفاضلية ، نحدد الثابتة α والثابتة B .

$$R_1C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow R_2C(-\alpha Ae^{-\alpha t} + Ae^{-\alpha t} + B = 0$$

$$\Leftrightarrow Ae^{-\alpha t}(1 - R_1C\alpha) + B = 0$$

ومنه فإن :

$$1 - R_2C\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{R_2C}$$

$$B = 0$$

وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{R_2C}}$$

وباعتبار الشروط البدئية عند $t = 0$ لدينا $u_C(0) = E$ نحدد الثابتة A وهذا لكون الدالة متصلة في أي لحظة t من لحظات تشغيل المكثف بما فيها اللحظة $t = 0$:

$$u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = E \Longrightarrow u_C(0) = A \Longrightarrow A = E$$

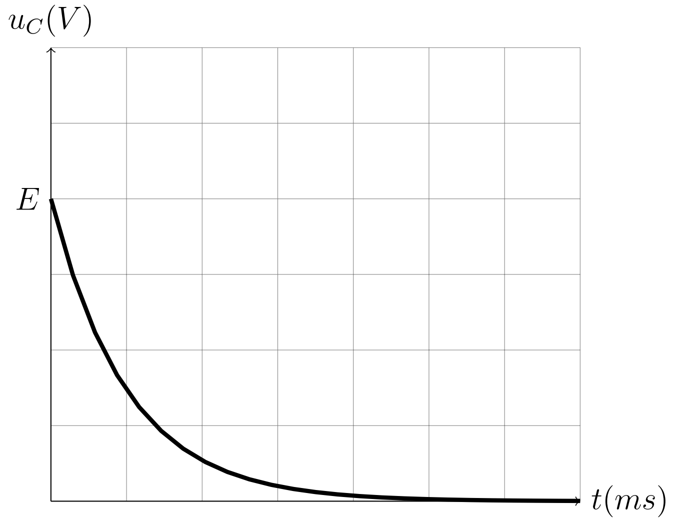
وبالتالي فإن الحل يكتب على الشكل التالي :

$$\boxed{u_C(t) = Ee^{-t/\tau}}$$

بحيث أن $\tau = R_2C$ وتسمى ثابتة الزمن للدارة RC

ج ـ المنحنى الممثل ل $u_C = f(t)$

رياضيا شكل المنحنى هو كالتالي ، بحيث أنه عند $t = 0$ لدينا $u_C(0) = E$ وعندما $t \longmapsto \infty$ فإن $u_C(\infty) = 0$ وعمليا نعتبر $t > 5\tau$ أن $u_c = 0$



د ـ طرق تحديد ثابتة الزمن τ

الطريقة الأولى :

باستعمال حل المعادلة التفاضلية :

$$u_C(t=\tau) = Ee^{-1}) = 0,37E$$

τ هو الأفصول الذي يوافق الأرتوب $0,37E$

الطريقة الثانية : استعمال المماس عند اللحظة $t = 0$

لدينا : $u_C(t) = Ee^{-t/\tau}$ أي أن $\left(\dfrac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = -\dfrac{E}{\tau}$

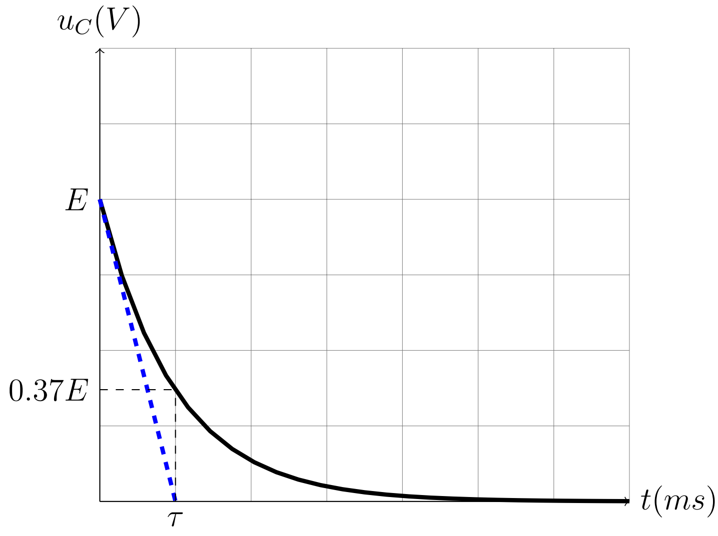
إذن معادلة المماس :

$$u_C(t) - u_C(0) = -\frac{E}{\tau}.(t - t_0)$$

$$u_C(t) = -\frac{E}{\tau}.t + E$$

إذن عند اللحظة $t = \tau$ فإن $u_C(t) = E$ أي أن تقاطع المقارب للمنحنى $u_C = 0$ و المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ تعطي $t = \tau$

ه ـ لمنحنى الممثل ل $u_C = f(t)$



و ـ انعدام التوتر خلال التفريغ

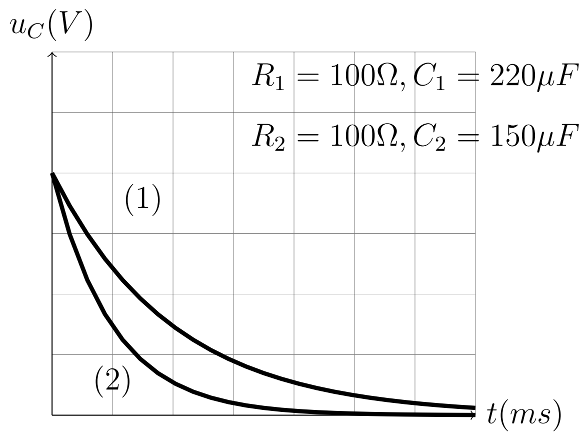
لدينا $u(t=5\tau)=\dfrac{E}{e^5}$ ، نستنتج أن

$$\frac{u_C(5\tau)}{u_C(0)}=0,67\%$$

ومنه فإن 5τ هي مدة التفريغ المكثف

ز ـ تأثير τ على مدة تفريغ المكثف

$\tau_1>\tau_2$ فنحصل على التمثيل الشكل أسفله ما تأثير τ على تفريغ المكثف في الدارة RC ؟



كلما كانت τ أصغر كلما كان تفريغ المكثف أسرع .

م ـ تعبير شدة تيار التفريغ :

لدينا :

$$u_C(t)=Ee^{-t/\tau}$$

وحسب قانون إضافية التوترات : $u_R=-u_C(t)$ أي أن :

$$u_R(t)=-Ee^{-t/\tau}$$

وبما أن $u_R = Ri(t)$ أي أن

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

ملحوظة :

⋆ التوتر بين مربطي مكثف $u_C(t)$ خلال الشحن والتفريغ دالة متصلة في كل لحظة

⋆ شدة التيار $i(t)$ المار في المكثف خلال الشحن والتفريغ دالة غير متصلة .