تطبيقات قانون نيوتن : الحركات المستوية

الدرس

I ـ حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم

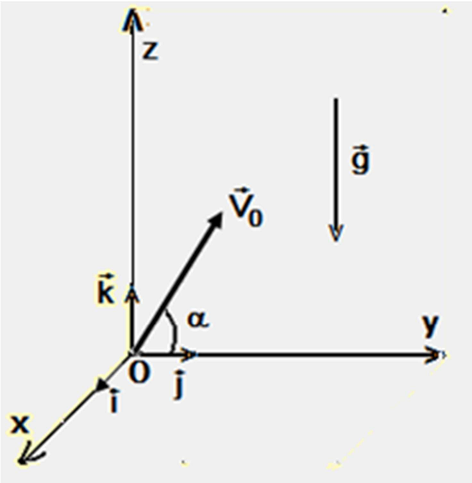
نسمي قذيفة كل جسم تم إرساله من سطح الأرض بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ على أن يبقى قريبا منه.

خلال هذه الدراسة ، نهمل قوى الاحتكاك مع الهواء ، ونعتبر أن القذيفة خاضعة لوزنها فقط أي حركتها في سقوط حر .

1 ـ متجهة التسارع

نرسل من نقطة O قذيفة (كرة) ذات كتلة m بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ غير رأسية أي أنها تكون زاوية α مع المستوى الأفقي Oxy ، نسمي الزاوية α بزاوية القذف. نعتبر أن مجال الثقالة منتظم .

ندرس حركة القذيفة في مرجع أرضي نعتبره غاليليا ، بحيث نعمل مواضع G مركز قصور القذيفة في كل لحظة بإحداثياتها في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مرتبط بالمرجع الأرضي .



الشروط البدئية : عند اللحظة $t=0$ لدينا : مركز قصور القذيفة في النقطة O ذي الإحداثيات :

$$O\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

ومتجهة سرعتها :

$$\vec{V}_G\begin{cases} V_{0x} = 0 \\ V_{0y} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0z} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن :

تخضع القذيفة إلى وزنها فقط أي أن $\vec{P} = m.\vec{a}_G$ ومنه $\vec{a}_G = \vec{g}$ (1)

إحداثيات $\vec{a}_G$ في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

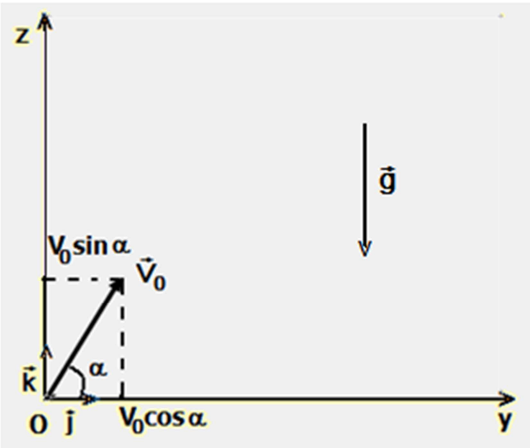
على المحور $(O,\vec{i})$ لدينا $a_x = 0$

على المحور $(O,\vec{j})$ لدينا $a_y = 0$

على المحور $(O,\vec{k})$ لدينا $a_z = -g$

أي أن متجهة التسارع $\vec{a}_G$ رأسية منحاها من الأعلى نحو الأسفل ومنظمها يساوي عدديا منظم متجهة الثقالة $\vec{g}$.

2 ـ متجهة السرعة



لدينا حسب متجهة التسارع :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = -gt + C_3 \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 ثوابت تحدد انطلاقا من الشروط البدئية .

بما أن متجهة السرعة البدئية توجد في المستوى (Oyz) عند اللحظة $t_0 = 0$ فإن :

$$\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{cases} \quad \text{و بالتالي لدينا} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0 \cos\alpha \\ C_3 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

أي أن إحداثيات متجهة السرعة في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي :

$$(2)\ \vec{v}_G \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

3 ـ المعادلات الزمنية للحركة :

لدينا :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_4 \\ y = (v_0 \cos\alpha)t + C_5 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_6 \end{cases}$$

بحيث أن C_4, C_5, C_6 ثوابت يجب تحديدها انطلاقا من الشروط البدئية أي أنه في اللحظة $t_0 = 0$ لدينا :

$$\overrightarrow{OG_0} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون إحداثيات النقطة G في اللحظة t في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي :

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = 0 \\ y = (v_0 \cos\alpha)t \quad (1) \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \quad (2) \end{cases}$$

من خلال هذه المعادلات يتبين أن حركة G تتم في المستوى الرأسي (Oyz) نقول أن **الحركة مستوية** .

ـ على المحور $(O, \vec{j})$ ، حركة G حركة **مستقيمية منتظمة** .

ـ على المحور $(O, \vec{k})$ ، حركة **مستقيمية متغيرة بانتظام** .

4 ـ معادلة المسار

معادلة المسار هي العلاقة التي تجمع بين إحداثيتي النقطة المتحركة G ونحصل عليها بإقصاء المتغير t بين y و z .

من المعادلتين الزمنيتين (1) و (2) نحصل على :

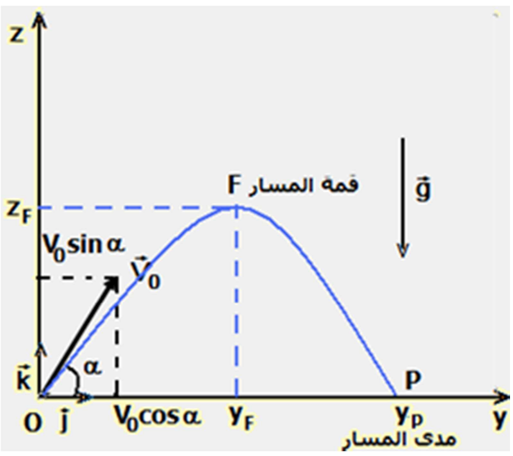
$$y = (v_0 \cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

أي أن معادلة المسار هي :

$$\boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} y^2 + y \tan\alpha}$$

نستنتج أن مسار مركز قصور قذيفة في سقوط حر بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ غير رأسية في مجال الثقالة المنتظم جزء **من شلجم ينتمي إلى المستوى الرأسي الذي يحتوي على المتجهة** $\vec{v}_0$.



5 ـ بعض مميزات المسار

أ ـ قمة المسار : (la flèche) هي

أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

عند وصول مركز قصور القذيفة إلى قمة المسار F تكون لدينا $\dfrac{dz}{dt} = 0$

بالنسبة لـ $y = y_F$

من خلال المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{dz}{dt} = -gt_F + v_0 \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

نعوض t_F في المعادلة (1)

$$y_F = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad y_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$\boxed{z_F = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$ أي في حالة إرسال قذيفة رأسيا نحو الأعلى .

ب ـ المدى la portée

هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القديفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة G أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

لتكن y_p و z_p إحداثيتا النقطة P ، لدينا : $z_P = 0$

أي أن :

$$y_P\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos\alpha}y_p + \tan\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_p = 0 \\ \text{ou} \\ y_p = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \end{cases}$$