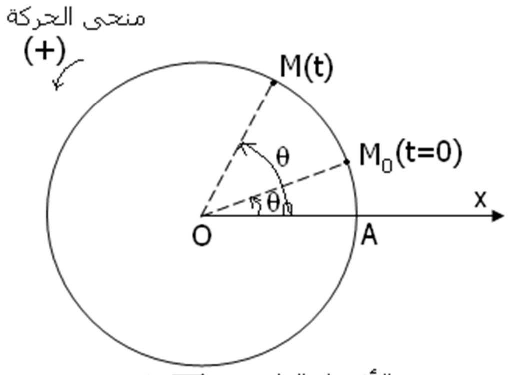
حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

I ـ الأفصول الزاوي ـ السرعة الزاوية (تذكير)

يكون جسم صلب ، غير قابل للتشويه ، في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركزة على هذا المحور باستثناء النقط المنتمية للمحور (Δ) .

نحدد موضع نقطة متحركة من الجسم ، في مرجع أرضي نعتبره غاليليا في لحظة t بالأفصول الزاوي .

1 ـ الأفصول الزاوي



الأفصول الزاوي $\theta=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$

الأفصول الزاوي للنقطة المتحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) هو الزاوية الموجهة θ بحيث :

$\theta=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ بحيث أن $\overrightarrow{Ox}$ محورا مرجعيا (أصل الأطوار)

والمسار الدائري للنقطة المتحركة موجها في منحى الحركة والذي نعتبره موجبا .

وحدة الأفصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي الرديان rad .

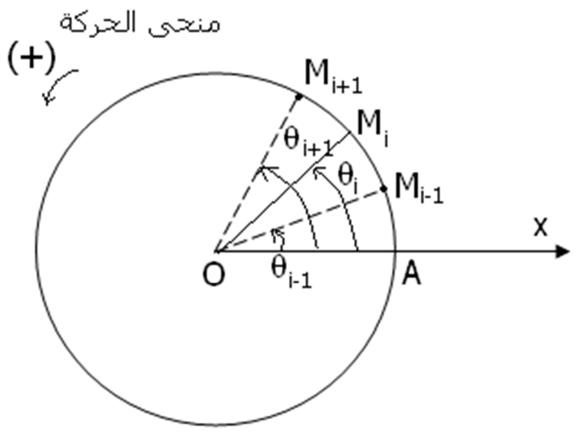
خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) يتغير الأفصول الزاوي مع الزمن t أي أنه دالة زمنية $\theta(t)$.

2 ـ السرعة الزاوية $\dot{\theta}=\dfrac{d\theta}{dt}$

نعتبر أنه خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) ، أنه في اللحظة t_i تحتل النقطة M الموضع M_i .

نعتبر لحظتين جد متقاربتين t_{i+1} و t_{i-1} تؤطران اللحظة t_i ، في هذه الحالة تساوي السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_i السرعة المتوسطة للنقطة M بين اللحظتين t_{i+1} و t_{i-1} وهي :

$$\dot{\theta}=\frac{\theta(t_{i+1})-\theta(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}$$



$\theta(t_{i+1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i+1}

$\theta(t_{i-1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

نضع $\Delta\theta=\theta(t_{i+1})-\theta(t_{i-1})$ و $\Delta t=t_{i+1}-t_{i-1}$

إذا كانت t_{i+1} و t_{i-1} جد متقاربتين ، فإن Δt تتناهى نحو الصفر وبالتالي ستكون عندنا :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)=\frac{d\theta}{dt}$$

$\dfrac{d\theta}{dt}$ المشتقة الأولى بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي في اللحظة t_1.

وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات هي rad/s

يرتبط الأفصول الزاوي والأفصول المنحني $s(t)$ في كل لحظة بالعلاقة التالية : $s(t)=r.\theta(t)$

ومنه نستنتج العلاقة بين السرعة اللحظية للنقطة M $v(t)=\dot{s}(t)=\dfrac{ds}{dt}$ (السرعة الخطية) والسرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)=\dfrac{d\theta}{dt}$:

$v(t)=r.\dot{\theta}(t)$

3 ــ التسارع الزاوي $\ddot{\theta}(t)=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

أ ــ تعريف

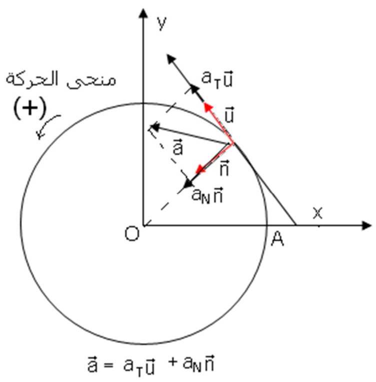
لتكن $\dot{\theta}(t_i)$ السرعة الزاوية لنقطة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت في لحظة t_i بحيث مؤطرة بلحظتين جد متقاربتين t_{i+1} و t_{i-1} بحيث أن $\dot{\theta}(t_{i+1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i+1} و $\dot{\theta}(t_{i-1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

عندما تتناهى $\Delta t=t_{i+1}-t_{i-1}$ نحو الصفر يتناهى خارج القسمة $\dfrac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t}=\dfrac{\dot{\theta}(t_{i+1})-\dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}$ إلى المشتقة بالنسبة للزمن للسرعة الزاوية أي أن :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{\theta}(t_{i+1})-\dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\ddot{\theta}(t_i)$$

وحدة التسارع الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي rad/s^2

ب ــ المركبتان a_N و a_T في أساس فريني .



لدينا في أساس فريني : $\vec{a}=a_T.\vec{u}+a_N.\vec{n}$ بحيث أن

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \text{ و } a_T=\frac{dv}{dt}$$

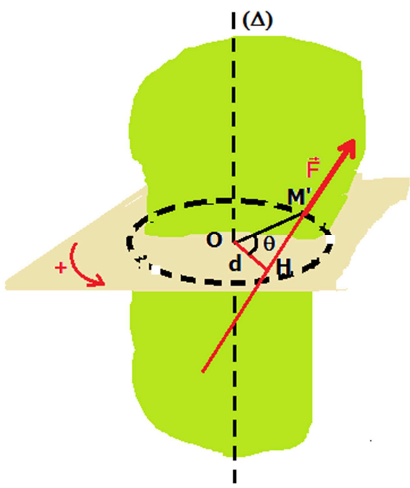
s الأفصول المنحني للنقطة M في لحظة t و $v=\dfrac{ds}{dt}$ السرعة الخطية للنقطة M في اللحظة t و ρ شعاع انحناء المسار في اللحظة t .

حسب تعريف الدوران لجسم صلب حول محور ثابت ، فإن مسار كل نقطة متحركة من الجسم دائريا ممركزا على محور الدوران وبالتالي يكون اتجاه المتجهة الواحدية $\vec{n}$ نحو النقطة O مركز الدائرة ويكون شعاع الانحناء مساويا لشعاع الدائرة r .

نعلم أن $s=r.\theta$ وأيضا $\dot{s}=r\dot{\theta}$ ومنه فإن $a_T=\dfrac{dv}{dt}=r.\dfrac{d\dot{\theta}}{dt}=r.\ddot{\theta}$

ولدينا كذلك $\rho=r$ أي أن $a_N=\dfrac{(r\dot{\theta})^2}{r}=r(\dot{\theta})^2$

II ــ العلاقة الأساسية للتحريك في حالة دوران جسم حول محور ثابت .



تخص هذه العلاقة كل جسم صلب خاضع لتأثيرات ميكانيكية في دوران حول محور ثابت .

1 ــ نص العلاقة

في معلم مرتبط بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت (Δ) يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت (Δ) في كل لحظة ، جداء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم في اللحظة المعينة :

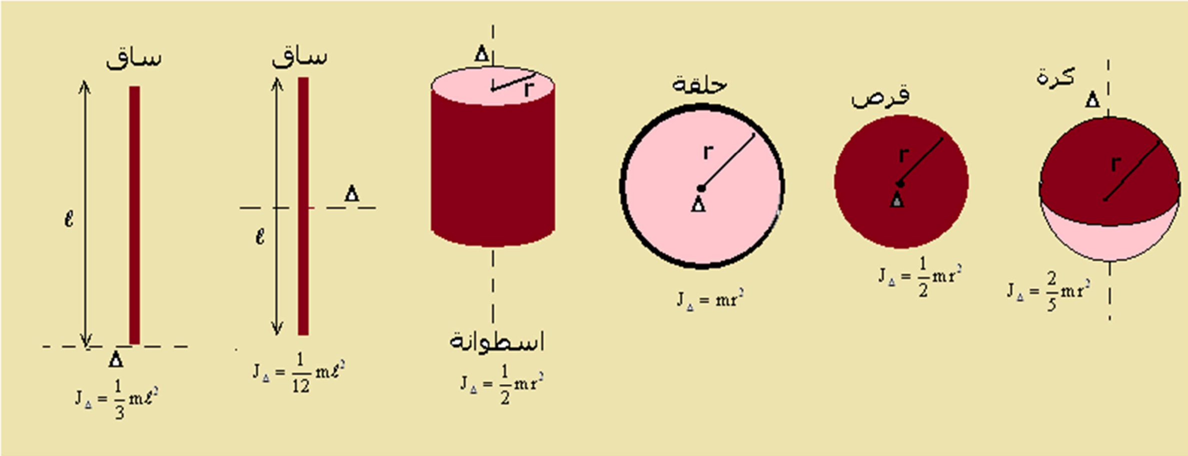
$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)=J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$ مجموع العزوم بالنسبة للمحور Δ للقوى المطبقة على الجسم الصلب $(N.m)$

J_Δ عزم قصور الجسم الصلب بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه ب $kg.m^2$ $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي نعبر عنه ب rad/s^2

2 ــ تعابير عزم القصور لأجسام متجانسة ذات أشكال هندسية بسيطة .

عزم قصور J_Δ لجسم صلب يميز حركة دوران الجسم حول المحور (Δ)



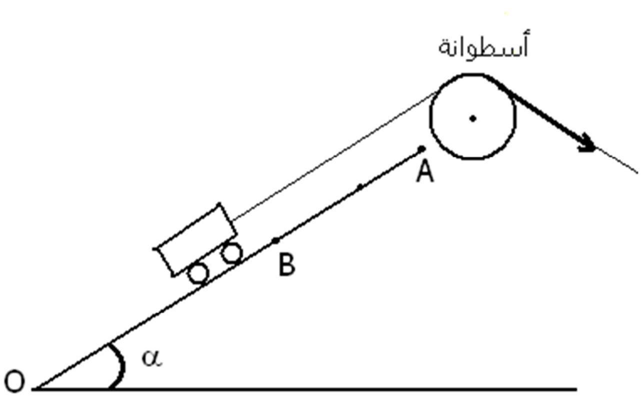
حالتان خاصتان :

إذا كان التسارع الزاوي منعدما $\ddot{\theta}=0$ فإن حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية منتظمة .

إذا كان التسارع الزاوي ثابتا تكون حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية متغيرة بانتظام .

III ـ تطبيق : حركة مجموعة ميكانيكية في حالة إزاحة ودوران حول محور ثابت .

تمرين 1



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g=9,8m/s^2$

يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل الامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $m_C=250g$ وشعاعها $r=6cm$.

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم $\mathcal{M}$ ثابت .

العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للخط الأفقي طوله $OA=2m$. كتلة العربة هي $m_S=400g$.

1 ـ أحسب شدة قوة الجر لمنح العربة تسارع $a=0,5m/s$

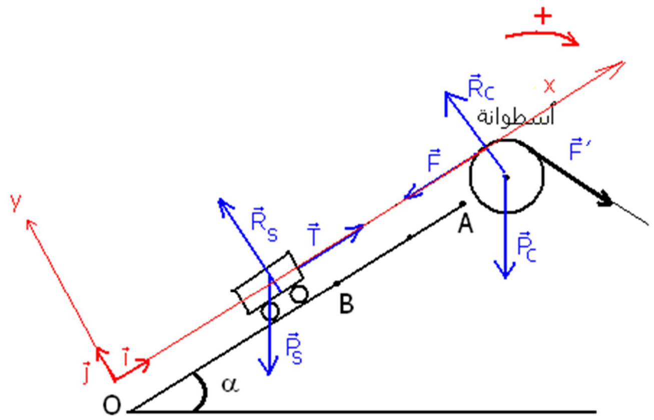
2 ـ أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم $\mathcal{R}$.

3 ـ على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A ؟

4 ـ أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة $\mathcal{M}$.

الجواب :

1 ـ حساب قوة الجر T :



نختار جسم مرجعي مرتبط بالأرض ومعلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{i})$ مواز للمستوى المائل وموجه في نفس منحى حركة العربة و $(O,\vec{j})$ عمودي على المستوى المائل وموجه نحو الأعلى . أنظر الشكل

دراسة حركة العربة S :

القوى المطبقة على العربة (S) كمجموعة مدروسة :

$\vec{P}_S,\vec{R}_S,\vec{T}$

حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا $\vec{P}_S+\vec{R}_S+\vec{T}=m_S\vec{a}_G$

نسقط العلاقة على المحور $(O,\vec{i})$ فنجد :

$$P_{Sx}+R_{Sx}+T_x=m_S.a \qquad (a_x=a)$$

$$-m_S g \sin\alpha + T = m_S.a$$

تمكن هذه العلاقة من حساب شدة توتر الخيط T بحيث أن

$T = m_S a + m_S g \sin\alpha$

$T = m_S (a + g\sin\alpha)$

تطبيق عددي : $T = 2{,}16N$

2 ـ المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة باعتبار أن السرعة البدئية منعدمة عند أصل المعلم :

بما ن التسارع ثابت إذن فحركة مركز قصور العربة مستقيمية متغيرة بانتظام معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ عند أصل المعلم (t=0) لدينا $x_0 = 0$ و $v_0 = 0$ وبالتالي فإن المعادلة الزمنية هي $x = 0{,}25t^2$

3 ـ المسافة OB التي يجب عندها حذف قوة الجر لكي يصل إلى النقطة A بسرعة منعدمة :

نقسم مسار العربة إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى وهي OB حيث أن حركة العربة حركة مستقيمية متغيرة بانتظام : $x = 0{,}25t^2$ و $v = 0{,}5t$

عند النقطة B تكون سرعة العربة هي : $v_B = 5t_B$ بحيث أن

$$t_B = \frac{v_B}{0{,}5} \Rightarrow x_B = OB = 0{,}25 \times \left(\frac{v_B}{0{,}5}\right)^2$$

$$v_B^2 = \frac{(0{,}5)^2}{0{,}25} \times OB \Rightarrow v_B^2 = OB$$

المرحلة الثانية هي عندما تقطع العربة المسافة BA ، نطبق مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}m_S v_A^2 - \frac{1}{2}m_S v_B^2 = \underset{B\to A}{W}\left(\vec{P}_S\right) + \underset{B\to A}{W}\left(\vec{R}_S\right)$$

لدينا حسب المعطيان أن العربة ستتوقف في النقطة A أي أن $v_A = 0$ وأن $\vec{R}_S$ عمودية على متجهة الانتقال أي أن شغلها منعدم . وبالتالي :

$$-\frac{1}{2}m_S v_B^2 = \underset{B\to A}{W}\left(\vec{P}_S\right) \Rightarrow v_B^2 = 2gBA\sin\alpha$$

$$OB = 2g(-OB + OA)\sin\alpha$$

$$OB(1 + 2g\sin\alpha) = 2gOA\sin\alpha \Rightarrow OB = \frac{2gOA\sin\alpha}{(1 + 2g\sin\alpha)} = 1{,}82m$$

4 ـ عزم قصور الأسطوانة هو :

$$J_\Delta = \frac{1}{2}m_C r^2 = 4{,}5.10^{-4}kg.m^2$$

لنستنتج قيمة $\mathcal{M}$:

دراسة حركة اللأسطوانة C :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الأسطوانة :

القوى المطبقة على الأسطوانة هي :

$\vec{P}_C, \vec{R}_C, \mathcal{M}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right), \vec{T}'$

$\mathcal{M}_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta}$ بحيث أن $a = r\ddot{\theta}$ لكون أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة . أي أن $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$ وبالتالي فإن

$$\mathcal{M}_\Delta = J_\Delta.\frac{a}{r} + T'.r = 0{,}13N.m$$