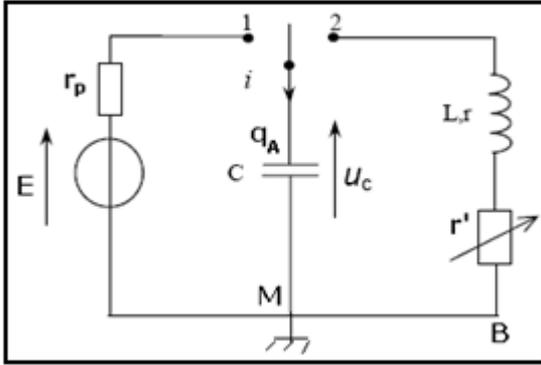


التذبذبات الحرة في دائرة RLC متوالية

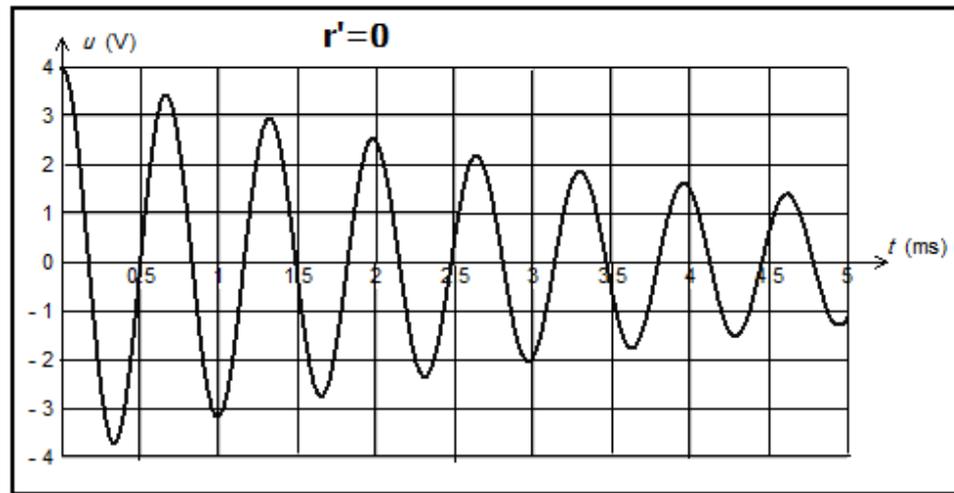


I - تفريغ مكثف في وشيعة

1- النشاط التجريبي

ننجز التركيب الكهربائي الممثل جانبه حيث نستعمل وسيط معلوماتي وحاسوب وبرنم يعالج المعطيات أو راسم التذبذب ذاكراتي .
 + ضبط التوتر المستمر الذي يعطيه المولد على القيمة $E=3V$ ومقاومة الموصل الأومي على $r'=0\Omega$
 + نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (1) لمدة زمنية كافية لشحن المكثف كليا .
 + نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (2) فنحصل على دائرة RLC متوالية مقاومتها الكلية $R=r+r'$ حيث r مقاومة الو شبيعة .
 + نعاين التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف

النتائج :



الاستثمار:

- 1- يمثل الرسم التذبذبي الممثل في الشكل أعلاه نموذجا للمنحنى المحصل عليه بالنسبة $r'=0$ كيف يتغير وسع التوتر $u_C(t)$ ؟ هل $u_C(t)$ دالة دورية ؟
 عند وضع K في الموضع (1) يشحن المكثف وعند وضعه في الموضع (2) نحصل على دائرة RLC متوالية حيث في هذه الحالة يفرغ المكثف في الو شبيعة .
 ويكون التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف متناوبا . $u_C(t)$ ليست بدالة دورية .
 -وسع التوتر $u_C(t)$ يتناقص مع الزمن t نقول أن **التذبذبات مخمدة**
 بما أن التذبذبات تتم دون أن تزود الدارة RLC بالطاقة غير الطاقة المخزونة في المكثف ، نقول أن **التذبذبات حرة** .
خلاصة :

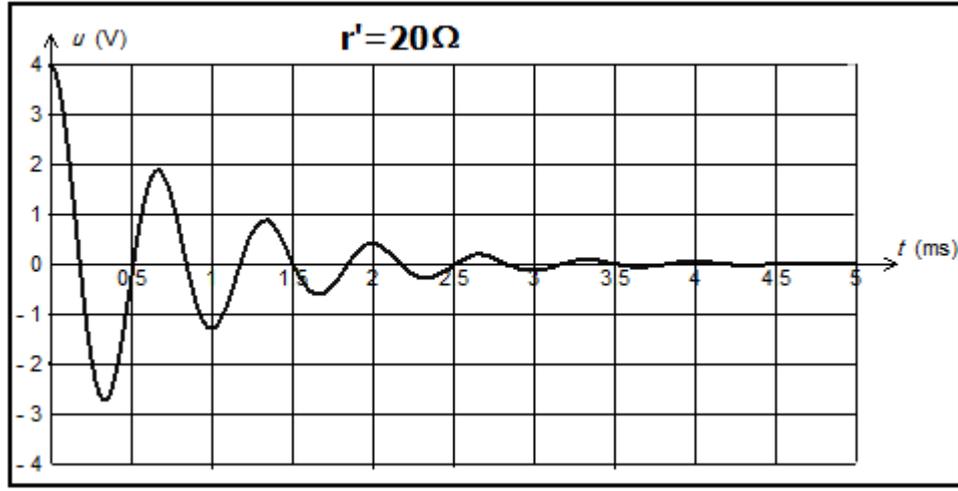
يؤدي تفريغ مكثف ، مشحون ، في وشيعة دائرة RLC متوالية ، إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة .
 نقول أن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا ومخمدا .

أنظمة التذبذبات الحرة :

- 2-1 نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$ عين مبيانيا T من خلال المبيان يمكن أن نعين شبه الدور وهو المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$ من خلال المبيان لدينا : $3T=2ms$ أي أن $T=1,5ms$

– تعريف بشبه الدور T

نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$.
 2 – ضبط مقاومة الموصل الأومي على $r'=20\Omega$ فنحصل على المنحنى التالي :



ما تأثير المقاومة R على :

1-2 وسع التذبذبات ؟

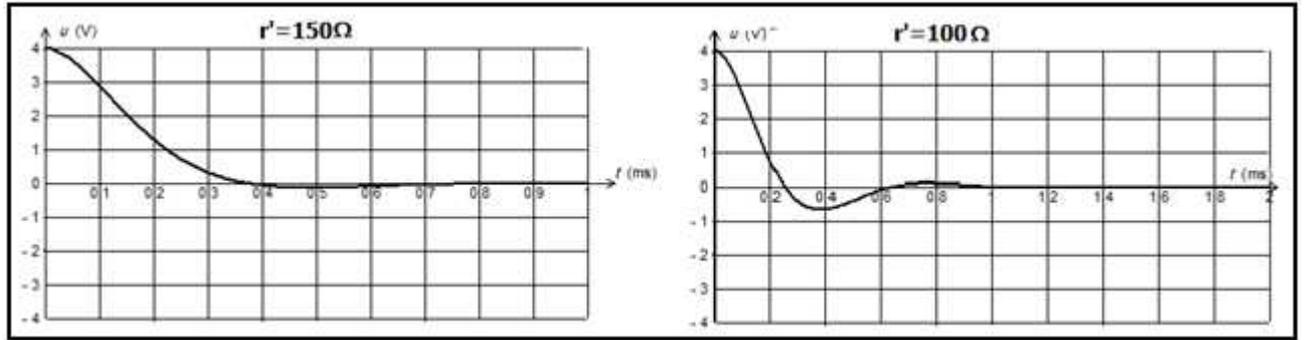
عندما نغير المقاومة الكلية للدارة يتغير وسع التذبذبات.

2-2 شبه الدور T ؟

بالنسبة لقيم المقاومة صغيرة جدا يلاحظ أن شبه الدور لا يتعلق بقيمة R

3-نضبط مقاومة الموصل الأومي على القيمتين : $r'=100\Omega$ و $r'=150\Omega$

هل التوتر $u_c(t)$ المعاين تذبذبي ؟



عندما تأخذ قيم كبيرة جدا $u_c(t)$ توتر غير تذبذبي أي أن التذبذبات تزول يكون لدينا خمود مهم .

4-حسب قيم المقاومة الكلية R للدارة RLC يلاحظ تجريبيا وجود نظامين للتذبذبات : نظام شبه دوري ونظام لا دوري .

تعرف على هاذين النظامين من خلال الشكل 2

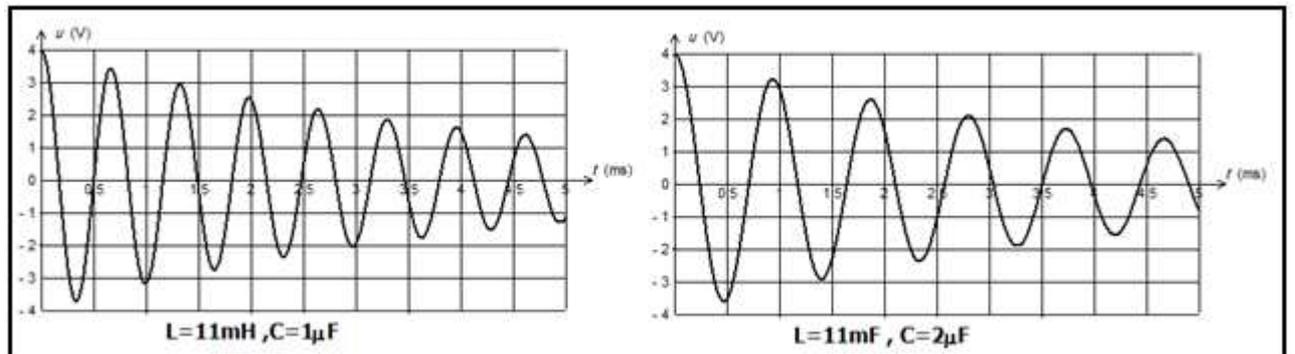
النظام شبه الدوري يحدث إذا كانت قيمة المقاومة R صغيرة .

النظام لا دوري عندما تكون R كبيرة جدا حيث تزول التذبذبات نظرا لوجود خمود مهم .

5- نضبط من جديد r' على القيمة 0

في مرحلة أولى نأخذ $L=11mH$ و $C=1\mu F$ ونقيس شبه الدور T .

في مرحلة ثانية : نأخذ $L=11mH$ و $C=2\mu F$ ونقيس T .



هل يتعلق شبه الدور بكل من L و C ؟

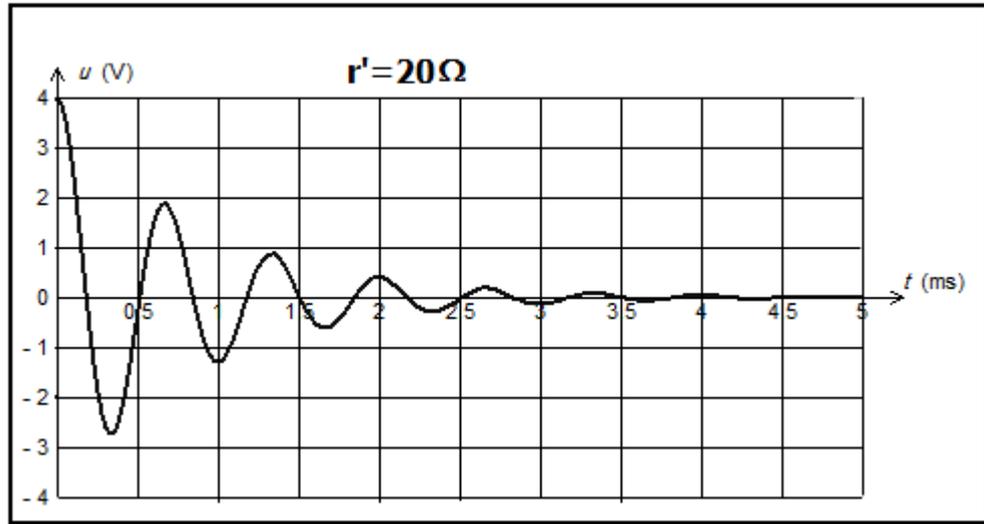
نعم يتعلق شبه الدور بقيم L و C ولا يتعلق بقيم R

– أنظمة الذبذبات الحرة

حسب مقاومة الدارة RLC نحصل على ثلاثة أنظمة

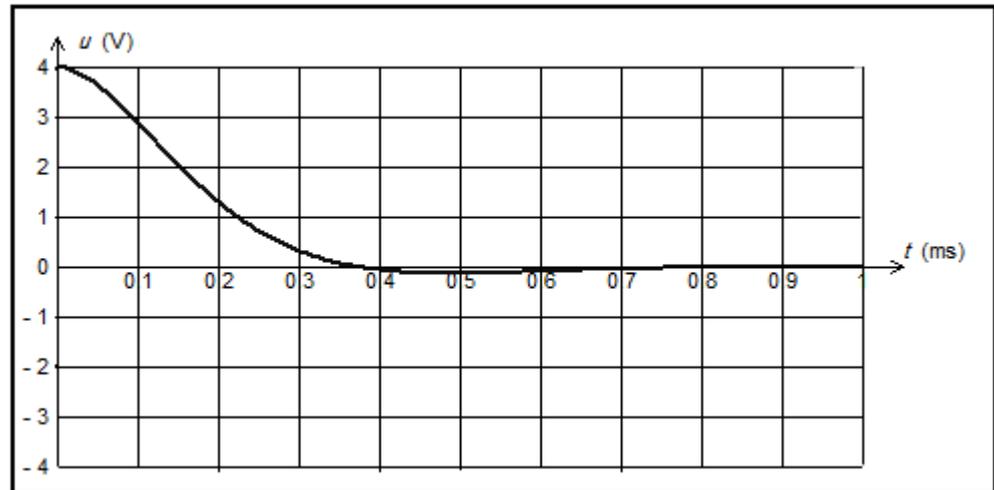
أ- نظام شبه دوري

R صغيرة نحصل على ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن

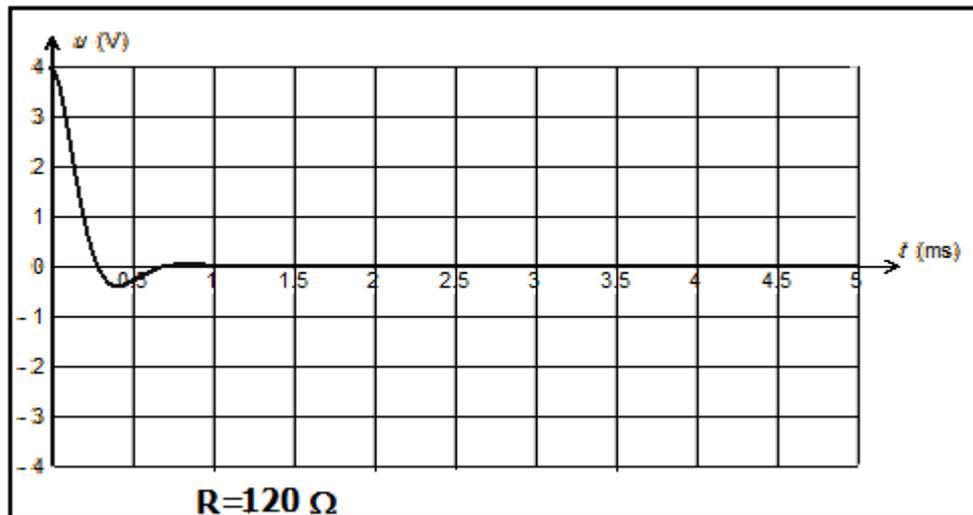


ب - نظام لا دوري

R كبيرة جدا : تزول الذبذبات نظرا لوجود خمود مهم ونسمي هذا النظام نظام لا دوري



ج- نظام حرج



في الذبذبات الحرة توجد قيمة معينة للمقاومة نرمز لها ب R_C وتسمى مقاومة حرجة وهي مقاومة تفصل بين النظام شبه الدوري والنظام اللا دوري ونسمي النظام في هذه الحالة بالنظام الحرج وفي هذه الحالة يرجع التوتر $u_C(t)$ إلى صفر بسرعة ودون تذبذب وتتعلق R_C ب C و L .

2 _ المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية .

نعتبر الدارة المتوالية الممثلة في الشكل جانبه :
نطبق قانون إضافية التوترات بين F و D فنجد :

$$u_C + u_R + u_L = 0 \quad (1)$$

$$u_R = r'.i \quad u_L = ri + L \frac{di}{dt} \quad i = C. \frac{du_C}{dt}$$

$$u_R = r'.C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$u_C + r'.C \frac{du_C}{dt} + rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + (r+r')C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$r+r' = R$$

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad (2)$$

المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad (2)$$

يعبر المقدار $\frac{R}{L} \frac{du_C}{dt}$ عن ظاهرة خمود الذبذبات ، ويحدد حسب قيم R نظام هذه الذبذبات .

II _ الذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC .

تتكون الدارة من مكثف سعته C وشحنته البدئية q_0 ووشيجة معامل تحريضها L ومقاومتها الداخلية r ونعتبرها مهملة . تنعت هذه الدارة بالمثالية لاستحالة تحقيقها تجريبيا لكون أن كل الوشيجات تتوفر على مقاومة داخلية .

1 _ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$.

حسب قانون إضافية التوترات لدينا :

$$u_C + u_L = 0 \quad (1)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad i = C. \frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

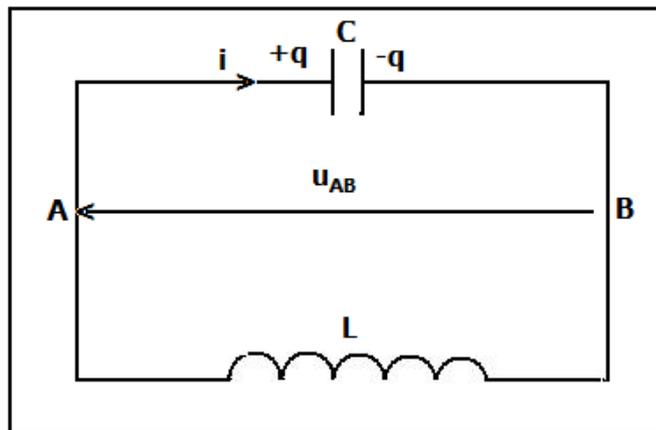
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad (2)$$

خلال الذبذبات الكهربائية الحرة غير المخمدة لدارة LC ، يحقق التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

2 _ حل المعادلة التفاضلية :

المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$ معادلة خطية من الدرجة الثانية ، رياضيا حلها يكتب على الشكل التالي :



$$u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

– U_m وسع الذبذبات .

– $\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$ الطور في اللحظة ذات التاريخ t .

T_0 : الدور الخاص للذبذبات .

φ : الطور عند أصل التواريخ ($t=0$)

أ – تحديد تعبير الدور الخاص :

نعوض الحل $u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -U_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c(t)$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c(t) = -\frac{1}{LC} u_c(t)$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

يتعلق الدور الخاص للذبذبات الحرة غير المخدمة بمعامل التحريض L وبسعة المكثف C :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

وحدة الدور الخاص T_0 في النظام العالمي للحدات هي الثانية . (s)

تمرين تطبيقي :

بين من خلال معادلة الأبعاد أن وحدة T_0 هي الثانية.

ب – تحديد φ و U_m :

لتحديد قيم φ و U_m نحدد الشروط البدئية عند تفريغ المكثف في الوشيعة . أي نعبر عن المقدارين $u_c(t)$ و $i(t)$ في اللحظة $t=0$ باعتبار أن هاتين الدالتين متصلتين كيف ما كانت t .

$$\text{لدينا } i(t) = C \frac{du}{dt} \Rightarrow i(t) = -\frac{2\pi}{T_0} C \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

عند اللحظة $t=0$ لدينا $i(0)=0$ الوشيعة لا يمر فيها أي تيار كهربائي

$$i(0) = -\frac{2\pi}{T_0} C \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi$$

في البداية شحنة المكثف مشحون : $u_c(0)=E$.

$$u_c(0) = U_m \cos(\varphi) = E \text{ وبما أن } E > 0 \text{ و } U_m > 0 \text{ فإن } \varphi = 0$$

وبالتالي فإن :

$$u_c(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

ج – تعبير الشحنة $q(t)$ و $i(t)$.

نعلم أن شحنة المكثف هي :

$$q(t) = C u_c(t) = C U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

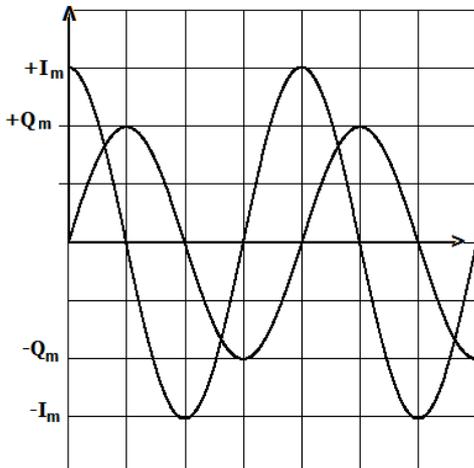
$$q_m = C U_m$$

شدة التيار الكهربائي :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$= q_m \frac{2\pi}{T_0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$i(t)$ متقدمة في الطور ب $\frac{\pi}{2}$ بالنسبة ل $q(t)$ و $u(t)$ نقول أن $u(t)$ و $q(t)$ على تربع في الطور



التمثيل المبياني ل $q(t)$ و $u(t)$ في اللحظة $t=0$ عندما $q=Q_m$ و $\varphi = 0$

$$q(t) = Q_m \cos \frac{2\pi}{T_0} t$$

$$i(t) = I_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

ملحوظة : عندما تكون شحنة المكثف قصوية تكون شدة التيار الكهربائي منعدمة .

III - انتقالات الطاقة بين المكثف والوشيعة .

توصلنا في الدروس السابقة أن المكثف بإمكانه أن يخزن طاقة كهربائية $\xi_c = \frac{1}{2} C u_c^2$ وأن الوشيعة كذلك بإمكانها أن تخزن طاقة

$$\xi_m = \frac{1}{2} L i^2$$

1 - الطاقة في الدارة LC مثالية :

نعتبر دارة مثالية LC بحيث أن $L=0,8H$ و $C=0,4\mu F$ و $U_0=12V$

1 - أعط تعبير التوتر بين مربطي المكثف . واستنتج تعبير شدة التيار الكهربائي المار في الدارة .

$$u_c = U_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) \text{ و وبالتالي فإن } u_c = 12 \cos(1770t)$$

$$\text{شدة التيار الكهربائي } i(t) = -8,496.10^{-3} \sin(100\pi t) \text{ أي أن } i(t) = -\frac{2\pi}{T_0} C \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right)$$

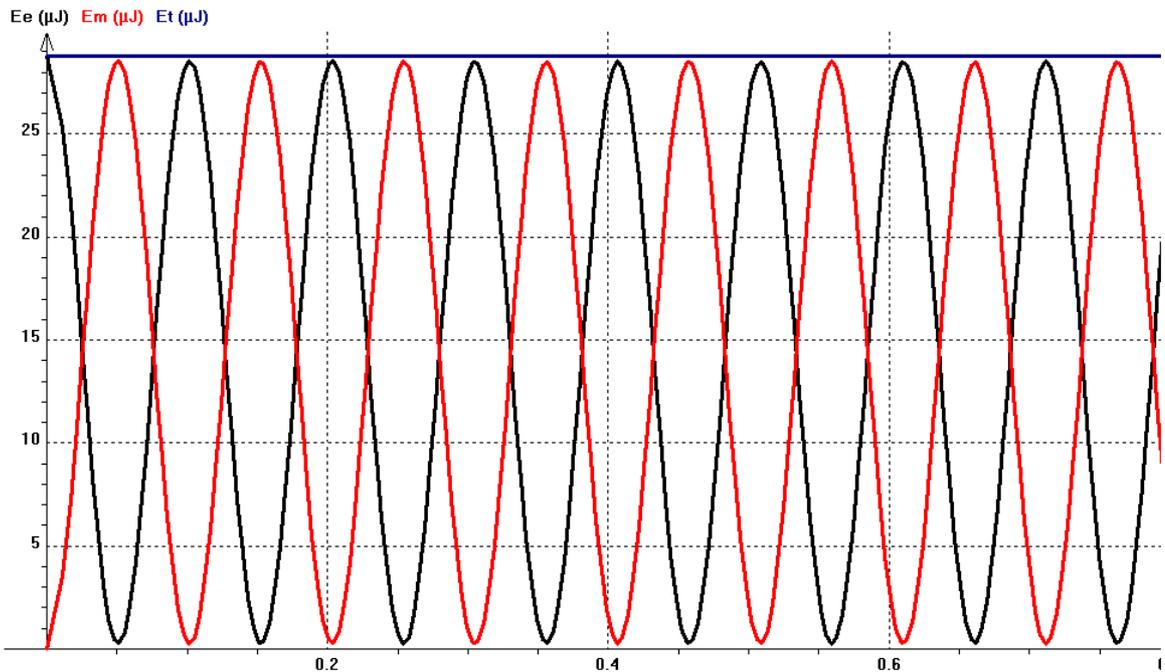
2 - أعط تعبير الطاقة الكهربائية في المكثف وتعبير الطاقة المخزونة في الوشيعة واستنتج الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC

$$\text{الطاقة الكهربائية : } \xi_c = \frac{1}{2} C u_c^2 = 2,88.10^{-5} \cos^2(1770t)$$

$$\text{الطاقة المخزونة في الوشيعة : } \xi_m = \frac{1}{2} L i^2 = -2,88.10^{-5} \sin^2(1770t)$$

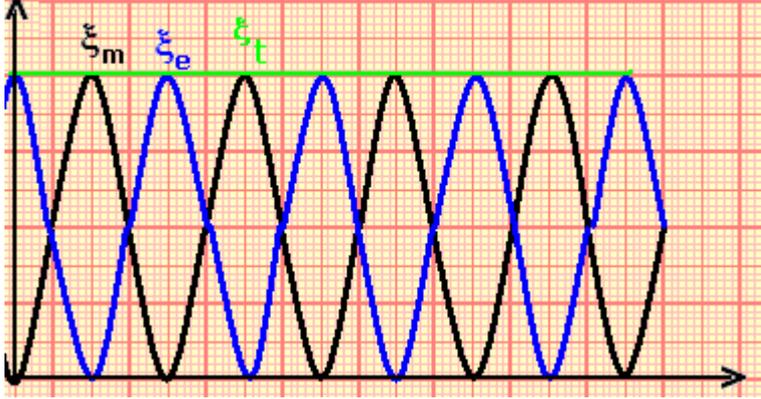
الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC :

$$\xi_t = \xi_c + \xi_m = 2,88.10^{-5} \cos^2(1770t) + 2,88.10^{-5} \sin^2(1770t)$$



دراسة منحنيات تغير الطاقات ξ_e, ξ_m, ξ_t بدلالة الزمن في دارة LC مثالية .

الطاقة الكلية في المخزونة في الدارة LC هي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية في المكثف $\xi_e = \frac{1}{2}Cu_c^2$ والطاقة المخزونة



في الوشيعية $\xi_m = \frac{1}{2}Li^2$.

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

تمثل الشكل جانبه تغيرات ξ_e, ξ_m, ξ_t بدلالة الزمن .

- 1 - كيف تتغير الطاقة ξ_m عندما تنقص الطاقة المخزونة في المكثف ؟
- 2 - كيف تتغير الطاقة ξ_e عندما تنقص الطاقة المخزونة في الوشيعية ؟

3 - كيف تتغير الطاقة الكلية ξ_t ؟ أكتب تعبير الطاقة الكلية

بطريقتين .

4 - أثبت رياضيا أن الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن t . بطريقتين ، استعمال حل المعادلة التفاضلية واستعمال المعادلة التفاضلية مباشرة .

خلاصة :

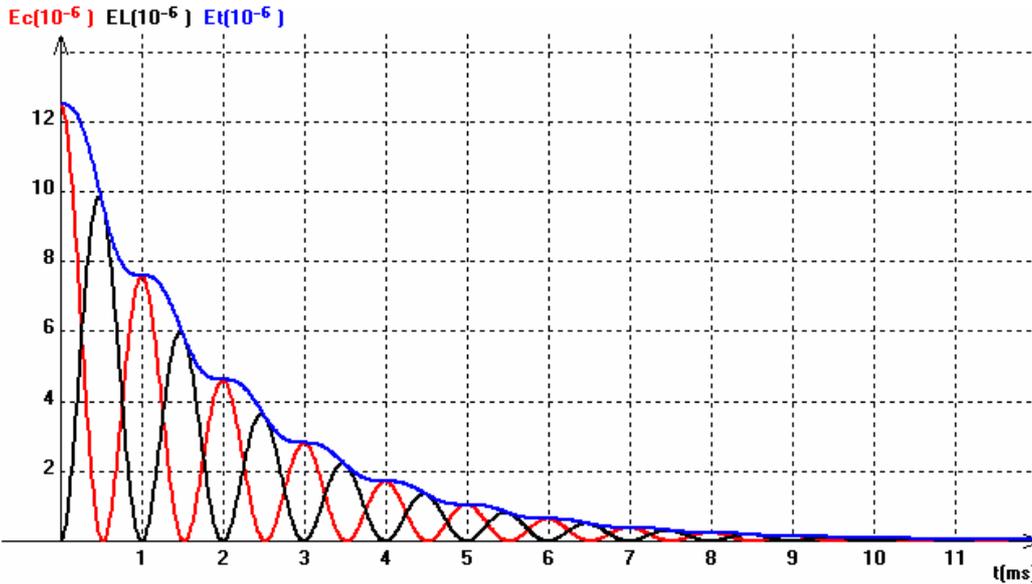
تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة خلال الزمن وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف .
خلال الذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في الوشيعية والعكس صحيح .

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}Li_m^2$$

4 - الطاقة في الدارة RLC المتوالية .

نعتبر الدارة RLC بحيث أن $L=10\text{mH}$ و $C=10\text{mF}$ و $U_0=6\text{V}$ و المقاومة الكلية للدارة $R=5\Omega$ نستعمل برنم Electricite للحصول على المنحنيات $\xi_e(t)$ و $\xi_m(t)$ و $\xi_t(t)$

دراسة منحنيات تغير الطاقات ξ_e, ξ_t, ξ_m بدلالة الزمن في RLC متوالية



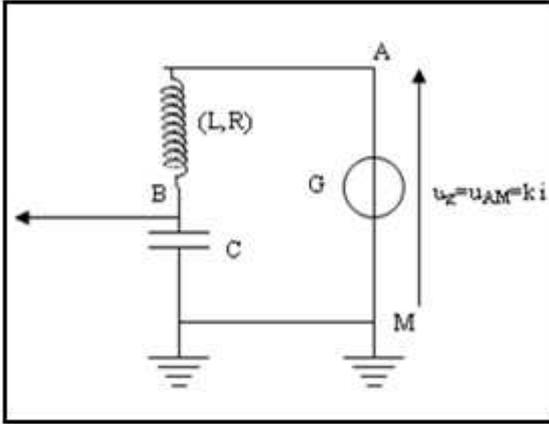
خلال دراسة تجريبية لدارة RLC متوالية حيث المقاومة الكلية R غير منعدمة نعاين بواسطة جهاز ملائم لهذا الغرض منحنيات تغيرات الطاقة ξ_e, ξ_t, ξ_m بدلالة الزمن فنحصل على المنحنيات الممثلة في الشكل جانبه :

1 - كيف تتغير الطاقة ξ_e عند تزايد ξ_m ؟

نفس السؤال عند تناقص ξ_m . ماذا تستنتج ؟

عندما تنقص الطاقة في المكثف تزداد الطاقة المخزونة في الوشيعية والعكس صحيح . أي أن هناك تبادل طاقي بين المكثف والوشيعية

- 2 - كيف تتغير بصفة عامة الطاقة الكلية ξ_t المخزونة في الدارة بدلالة الزمن ؟
 يلاحظ أن خلال كل تبادل طاقي بين المكثف والشحنة تتناقص الطاقة الكلية نتيجة وجود المقاومة R .
 5 - ما الظاهرة المسؤولة عن هذا التغير ؟
 ظاهرة خمود نتيجة تحول جزء من الطاقة الكلية بمفعول جول إلى طاقة حرارية .
 4 - ما المقدار الذي يحول دون الحصول على ذبذبات غير مخمدة ؟



$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i \left(L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2$$

من خلال هذه النتيجة يتبين أن الطاقة الكلية تناقصية :

$$\frac{d\xi_t}{dt} = -Ri^2 < 0 \text{ ويعزى هذا التناقص إلى وجود المقاومة } R .$$

خلاصة :

تتناقص الطاقة الكلية لدارة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .

VI - صيانة الذبذبات .

في كل لحظة يمكن كتابة

$$u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$$

$$ki = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \text{ et } u = u_{BM}$$

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + (R - k)C \frac{du}{dt} + u = 0$$

بالنسبة لـ $k=R$ نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\text{التالية } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0 \text{ وهي المعادلة المميزة}$$

للمتذبذب (L,C) ذي مقاومة غير مهملة .

إذن فالتركيب المدروس يمكن من صيانة التذبذبات .

إنجاز المولد G

المضخم العملياتي كاملا ويشغل في النظام الخطي .

$$u_{AB} = 0 \text{ و } \bar{i} = \bar{i}' = 0$$

$$u_g = u_{AM} = u_{AS} + u_{SB} + u_{BM}$$

$$= -R_1 i + R_1 i' + R_0 i'$$

$$u_{AS} = u_{AB} + u_{BS}$$

$$-R_1 i = 0 - R_1 i' \Leftrightarrow i = i'$$

$$u_g = R_0 i \Leftrightarrow u_g = ki$$

$$k = R_0$$

معاينة التوتر بين مربطي مكثف

الدارة (L,C) الذي يوجد بها

المولد G

عند معاينة التوتر بين مربطي

مكثف نلاحظ :

$R_0 < R$ لا تكون هناك تذبذبات

$R_0 > R$ تكون هناك تذبذبات لا

جيبية

R_0 أكبر بقليل من R تكون التذبذبات جيبية

