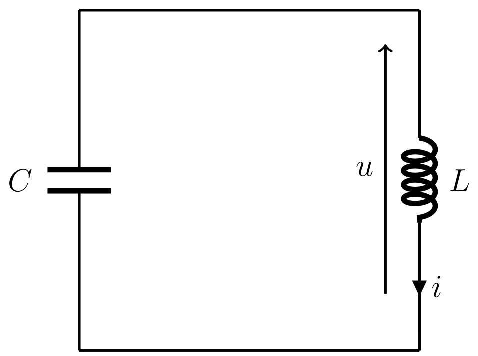
تمارين في الكهرباء

التمرين الأول :



يجتاز تيار كهربائي شدته i دارة كهربائية LC . بحيث أن تعبيره في اللحظة t هو :

$$i(t) = 5 \times 10^{-3} sin(10^3.t)$$

i بالأمبير و $L = 0,1H$

1 ـ أحسب تردد التيار الكهربائي المار في هذه الدارة

2 ـ أحسب C سعة المكثف

3 ـ أحسب $q(0)$ شحنة المكثف عند اللحظة $t = 0$

4 ـ أعط تعبير التوتر $u(t)$.

5 ـ استنتج تعبير $q(t)$ شحنة المكثف .

الحل

1 ـ حساب التردد $f = \dfrac{1}{T_0}$

$i(t)$ دالة جيبية تعبيرها كالتالي : $i(t) = I_m cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t\right)$ لدينا من خلال هذا التعبير

$\dfrac{2\pi}{T_0} = 10^3$ أي أن

$$f = \frac{10^3}{2\pi} = \frac{500}{\pi} Hz$$

2 ـ الدور الخاص للدارة LC وهي مقرا لذبذبات كهربائية جيبية هو :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

أي أن $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ومنه فإن

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

$$C = 10\mu F$$

3 ـ حساب $q(0)$ شحنة المكثف عند اللحظة $t = 0$

نعلم أن حسب قانون إضافية التوترات : $u_C = -u_L$ أي أن $u_C = -L\dfrac{di}{dt}$

وبما أن $i = I_m sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t\right)$ فإن $\dfrac{di}{dt} = I_m \dfrac{2\pi}{T_0}.cos\left(2\pi f t\right)$

الحل

ولدينا كذالك : $u_C = \frac{q(t)}{C}$ إذن

$$\frac{q(t)}{C} = -LI_m\frac{2\pi}{T_0}.cos\left(2\pi ft\right)$$

$$q(t) = -2\pi LCI_m fcos\left(2\pi ft\right)$$

عند $t = 0$ لدينا

$$q(0) = -2\pi LCI_m f$$

$$q(0) = -5\mu C$$

4 ــ تعبير التوتر $u(t)$

حسب قانون إضافية التوترات : $u(t) = u_C = -L\frac{di}{dt}$ وبما أن $\frac{di}{dt} = I_m\frac{2\pi}{T_0}.cos\left(2\pi ft\right)$ فإن

$$u(t) = -LI_m\frac{2\pi}{T_0}.cos\left(2\pi ft\right)$$

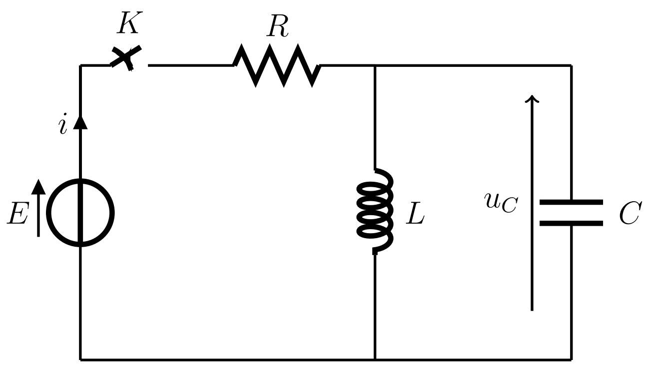
$$u(t) = -0,5cos\left(10^3 t\right)$$

5 ــ تعبير $q(t)$ شحنة المكثف :

$$q(t) = -2\pi LCI_m fcos\left(2\pi ft\right)$$

$$q(t) = -5.10^{-6}cos(10^3 t)$$

التمرين الثاني :



نعتبر التركيب الممثل في الشكل جانبه حيث $E = 12V$ و $C = 0,45\mu F$ و $R = 25\Omega$ ومعامل التحريض L للوشيعة ذات المقاومة المهملة مجهول . نعتبر أن قاطع التيار الكهربائي K مغلق مدة كافية للحصول على النظام الدائم .

1 ــ أ . بين أن التوتر بين مربطي الوشيعة منعدم .

ب ــ استنتج أن شحنة المكثف منعدمة وأن أي تيار لا يمر في المكثف .

ج ــ أوجد شدة التيار I_0 الطي يمر في الوشيعة ,

2 ــ في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، نفتح قاطع التيار K .

أ ــ أنجز دارة مبسطة للدارة المدروسة في هطه الحالة .

ب ــ أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C بين مربطي المكثف .

ج ــ حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي :

$$u_C(t) = U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

أوجد تعبير T_0 و U_m و φ بدلالة E و R و C و L .

د ــ علما أن $T_0 = 3,2ms$ ، استنتج معامل التحريض L للوشيعة .

الحل

في النظام الدائم لدينا : $i(t) = I_0$ أي أن التوتر بين مربطي الوشيعة : $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ ومنه

فإن $u_L = 0$ ، من جهة أخرى لدينا : $u_C = U_L$ حسب التركيب .وبالتالي فإن $u_C = 0$

ب ـ لنستنتج أن شحنة المكثف منعدمة : نعلم أن $q(t) = C.u(t)$ وبما ان $u(t) = 0$

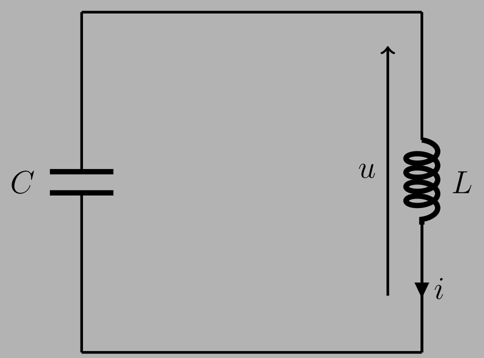
فإن $q(t) = 0$ وبالتالي فإن شحنة المكثف منعدمة .

ج ـ قيمة شدة التيار الكهربائي I_0 : نطبق قانون إضافية التوترات بالنسبة للدارة RL :

$$E = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$$

ولدينا في النظام الدائم : $i(t) = I_0$ أي أن $E = RI_0$ وبالتالي فإن : $I_0 = \dfrac{E}{R} = 0,48A$

2 ـ للنجز الدارة المبسطة في هذه الحالة :



ب ـ المعادلة التفاضلية :

نطبق قانون إضافية التوترات بالنسبة للدارة LC : $u_C + u_L = 0$:

$$u_C(t) + LC\frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

ج ـ تعبير كل من T_0 و U_m و φ

بما أن $u_C(t)$ حلا للمعادلة التفاضلية فإنها تحققها ، أي أن :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}u_C$$

ولكي يكون $u_C(t)$ حلا للمعادلة التفاضلية يكفي أن : $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$ ومنه فإن :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

تحديد تعبير الطور φ :

عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i(0) = I_0$ و $u_C(0) = 0$ وبالتالي فإن $u_C(0) = U_m cos\varphi = 0$ أي

أن $cos\varphi = 0$ ومنه فإن $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

وبما أن $i(0) = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt} > 0$ أي أن $sin\varphi < 0$ ومنه فإن $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

تحديد تعبير U_m

$$i(0) = \frac{CU_m}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow U_m = I_0\sqrt{\frac{L}{C}}$$

د ـ استنتاج معامل التحريض L

$$L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = 0,57H$$