Correction du bac juin 2018
PHYSIQUE CHIMIE

1 CHIMIE

Solution .1 : Réaction de l'eau avec un acide et avec un ester

1. **Étude d'une solution aqueuse d'un acide AH** :

1. 1. L'équation chimique de la réaction de l'acide HA avec l'eau

$$HA(aq) + H_2O(l) \leftrightarrows A^-(aq) + H_3O^+(aq)$$

1. 2. Le taux d'avancement final de la réaction :

Le tableau d'avancement de la réaction

	$AH(aq)$	+	$H_2O(l)$	$\longrightarrow$	$A^-(aq)$	+	$H_3O^+(aq)$
EI	CV		—		0		0
EF	$CV - x_f$		—		x_f		x_f

Par définition le taux d'avancement est

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$$

$$\tau = \frac{[H_3O^+]_f.V}{CV} = \frac{10^{-pH}}{C}$$

$$\boxed{\tau = \frac{10^{-3,44}}{10^{-2}} = 0,036 = 3,6\%}$$

Puisque la réaction est très limité ie sur 100 molécules de HA, il ne réagit que 4 molécules donc L'espèce chimique qui prédomine est HA l'acide 2-méthylpropanoïque .

1. 3. Par définition la constante d'acidité du couple $HA(aq)/A^-(aq)$ est :

$$K_A = \frac{[H_3O^+]_{\text{éq}}[A^-]_{\text{éq}}}{[AH]_{\text{éq}}}$$

$$logK_A = log[H_3O^+]_{\text{éq}} + log\left(\frac{[A^-]_{\text{éq}}}{[AH]_{\text{éq}}}\right)$$

Sachant que $pK_A = -logK_A$ et le $pH = -log[H_3O^+]$, d'autre part $[A^-]_{\text{éq}} = [H_3O^+]_{\text{éq}} = 10^{-pH}$ et $[AH]_{\text{éq}} = C - 10^{-PH}$

$$pK_A = pH - log\left(\frac{10^{-pH}}{C - 10^{-pH}}\right)$$

$$\boxed{pK_A = 2pH + log\left(C - 10^{-pH}\right)}$$

Vérification :

$$pK_A = 2 \times 3,44 - log\left(10^{-2} - 10^{-3,44}\right) \simeq 4,86$$

1. 4. 1-4-1. L'équation de la réaction chimique qui se produit entre la solution d'acide HA et la soude :

$$HA(aq) + HO^-(aq) \longmapsto A^-(aq) + H_2O(l)$$

1-4-2. Tableau d'avancement de la réaction :

	$AH(aq)$	+	$HO^-(aq)$	$\longmapsto$	$A^-(aq)$	+	$H_2O(l)$
EI	CV_A		C_BV_B		0		0
EF	$CV - x_{max}$		$C_BV_B - x_{max}$		x_f		—

Puisque $V_B < 20ml$, $V_B < V_A$ et $C_B = C$ alors $C_BV_B < C.V_A$ donc le réactif limitant au cours de cet réaction est l'ion hydroxyde HO^- d'autre part on a au cours de cet ajout :

$$\frac{[AH]_f}{[A^-]_f} = 10^{pK_A - pH}$$

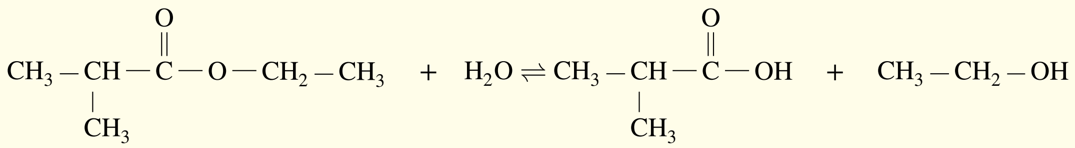
$$\frac{CV_A - C_BV_B/(V_T}{C_BV_B/V_T} = \frac{V_A}{V_B} - 1 = 10^{pK_A - pH}$$

$$\boxed{V_B = \frac{V_A}{10^{pK_A - pH}} + 1}$$

$$V_B = \frac{20}{1 + 10^{4,86 - 5,50}} = 16,3ml$$

2. **Hydrolyse d'un ester**

2. 1. L'équation modélisant la réaction qui se produit :



2. 2. Le temps de demi réaction :

	ester	+	eau	$\leftrightarrows$	Acide	+	Alcool
EI	$n0$		n_0		0		0
E($t_{1/2}$)	$n_0 - x(t_{1/2})$		$n_0 - x(t_{1/2})$		$x(t_{1/2})$		$x(t_{1/2})$

Par définition le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ correspond à $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$. La courbe de la figure correspond à la variation de la quantité de matière de l'ester qui reste $n_{Er} = n = f(t)$. Quelle relation existe -t-elle entre $x(t_{1/2})$ et $n_{Er}(t_{1/2})$?

$$x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$$

$$n_0 - n(t_{1/2}) = \frac{n_0 - n(f)}{2}$$

$$n(t_{1/2}) = n_0 - \frac{n_0 - n(f)}{2}$$

$$n(t_{1/2}) = \frac{n_0 + n(f)}{2}$$

D'après le graphe (la courbe 1) nous avons $n_f = 400mmol$ et $n_0 = 600mmol$, donc

$$n(t_{1/2}) = 500mmol$$

qui correspond graphiquement $t_{1/2} \simeq 7,2min$

2. 3. le catalyseur est un facteur cinétique , son présence augmente la vitesse de réaction ie la réaction atteint rapidement son état final et graphiquement c'est la courbe (2) qui atteint rapidement l'état final donc sa réaction est catalysée .

La courbe correspondant à la réaction d'hydrolyse sans catalyseur est (1) .

2. 4. La vitesse volumique de la réaction à $t = 5min$

Par définition :

$$v(t) = \frac{1}{V_T}.\frac{dx(t)}{dt}$$

D'après le tableau d'avancement :

$$x(t) = n_0 - n(ester)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{dn(t)}{dt}$$

graphiquement :

$$v(t=5min) = -\frac{1}{V_T}.\left(\frac{dn}{dt}\right)_{t=5min} \simeq -\frac{1}{V_T}.\underbrace{\left(\frac{\Delta n}{\Delta t}\right)}_{\text{Coef directeur de T}}$$

$$v(t=5min) = -\frac{1}{71\times 10^{-3}} \times \frac{0,35-0,55}{12,6\times 60} = 0,223mmol/min.ml = 3,73mol/s.l$$

3. Électrolyse de l'eau ;

D'après les données de l'exercice , nous avons :

Le cuve d'électrolyse contient les espèces suivants , qui sont des réactives : $H^+(aq)$ et l'eau $H_2O(l)$ donc les demi réaction prévues au cours du fonctionnement sont

$$2H^+(aq) + 2e^- \rightleftharpoons H_2(g)$$

$$2H_2O(l) \rightleftharpoons O_2(g) + 4H^+ + 4e^-$$

3. 1. Les affirmations qui sont exactes :

a) Au niveau de l'anode il y a oxydation c'est à dire libération des électron donc il est lié au pôle positif du générateur . (exacte)

b) Une transformation forcée s'effectue dans le sens inverse d'une transformation spontanée (exacte)

c) faux la réduction se fait au niveau de la cathode

d) Le courant sort de l'électrolyseur par la cathode car (le pôle où les électrons entrent dans l'électrolyseur) (exacte)

Le nombre des affirmations exactes est 3 .

3. 2. L'équation qui se produit au niveau de l'anode c'est l'oxydation de l'eau

$$2H_2O(l) \rightleftharpoons O_2(g) + 4H^+ + 4e^-$$

3. 3. L'expression du volume de dioxygène formé à l'instant t : D'après la demi-équation , nous avons la quantité de matière des électrons libérées est

$$n(e) = 4n(O_2)$$

$$n(e) = 4.\frac{V_{O_2}}{V_m}$$

d'autre part on a au cous de fonctionnement et à l'instant t $Q = I.\Delta t = n(e).F$

$$n(e) = \frac{I.\Delta t}{N_A.e}$$

$$\frac{I.\Delta t}{N_A.e} = 4.\frac{V_{O_2}}{V_m}$$

$$\boxed{V_{O_2} = \frac{I.\Delta t.V_m}{4.N_A.e}}$$

Application numérique :

$$V_{O_2} = \frac{0,2\times 8\times 60\times 24}{4\times 6,02\times 10^{23}\times 1,6\times 10^{-19}} = 5,9\times 10^{-3}l = 5,9ml$$

2 PHYSIQUE

Solution .2 Transformation nucléaire

1.

1. 1. Définition de l'énergie de liaison d'un noyau :

L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie qui serait libérée par la formation d'un noyau ${}^A_ZX$ à partir de ces nucléon séparés .

$$E_l = \left[(Z.m_p + (A-Z).m_n) - m({}^A_ZX)\right].c^2$$

1. 2. La proposition juste est (c) . Justification

D'après la loi de décroissance radioactive on peut montrer que pour $t = nt_{1/2}$ on aura $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2^n}$ donc pour $n = 3$ on trouve facilement que $\frac{N}{N_0} = 12,5 \times 10^{-2} = 12,5\%$

1. 3. D'après les données : 1Ci est l'activité d'un échantillon de 1g de radium 226 qui contient

$$N = \frac{1}{226} \times 6,02 \times 10^{23}$$

Donc $a = \lambda.N$

$$1Ci = 1,4 \times 10^{-11} \times \frac{1}{226} \times 6,02 \times 10^{23}$$

$$1Ci = 3,73 \times 10^{10} Bq$$

1. 4. l'activité d'un échantillon de 1g de radium en Juin 2018 sachant que son activité en Juin 1898 est 1Ci :
La durée de cette activité est $\Delta t = t = 120ans = 120 \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 3,787 \times 10^9 s$.
On applique la loi de décroissance radioactive :

$$a(t) = a_0 exp(-\lambda.t)$$

$$a(t) = 3,73 \times 10^{10} \times .exp(-1,4 \times 10^{-11} \times 3,787 \times 10^9$$

$$a(t) = 3,54 \times 10^{10} Bq$$

1. 5. Calcul de l'énergie $|\Delta E|$ produite par la désintégration d'un noyau de radium :
L'équation de la réaction nucléaire est

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow ^{222}_{86} Rn + ^4_2 He$$

L'énergie libérée au cours de cette désintégration est

$$|\Delta E| = E_l(^{226}_{88}Ra) - E_l(^{222}_{86}Rn) - E_l(^4_2He)$$

$$|\Delta E| = 1,7311 \times 10^3 - 1,7074 \times 10^3 - 28,4$$

$$\boxed{|\Delta E| = 4,7MeV}$$

2.

2. 1. La nature du mouvement de la particule α dans la zone où règne le champs magnétique $\vec{B}$:
On applique la deuxième loi de Newton dans un référentielle terrestre considéré comme Galiléen . La particule est soumise à une seule force est celle de Lorentz perpendiculaire à $\vec{V_0}$ et $\vec{B}$, appartient au plan (π) est d'expression $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

$$q\vec{V} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$$

dans une base de Frenet :

$$q\vec{V} \wedge \vec{B} = m.(a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n} + a_z.\vec{k})$$

$$2.e.V.B.\vec{n} = m.(a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n} + a_z.\vec{k})$$

donc :
$a_z = 0$ d'après les conditions initiales à t=0 , $v_{0z} = 0$ et $z_0 = 0$ on a $z = 0$ c'est à dire que le mouvement se fait dans le plan π
$a_T = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0$ donc $v = V_0$ le mouvement est uniforme .
$a_n = 2.e.v.B$ donc $m\frac{V_0^2}{\rho} = 2.e.V_0.B$ c'est dire que $\rho = R = \frac{m.V_0}{2.e.B}$ est constant donc la nature du mouvement de la particule est **circulaire uniforme de rayon $R = \frac{m.V_0}{2.e.B}$.**

2. 2. L'expression de la distance OM :
OM est le diamètre du demi cercle dans le plan π , est égal à $2R$

$$\boxed{OM = 2R = \frac{m.V_0}{e.B}}$$

Application numérique :

$$OM = \frac{6,6447 \times 10^{-27} \times 1,5 \times 10^7}{1,6 \times 10^{-19} \times 1,5} = 0,41m$$

Solution .3 Électricité

I. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

1. L'équation différentielle vérifiée par u_c

D'après la loi d'additivité des tension :

$$u_C + u_R = E$$

$$u_C + R.i = E$$

avec $i = C.\frac{du_C}{dt}$

$$u_C + RC.\frac{du_C}{dt} = E$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}.u_C = \frac{E}{RC}$$

2. Détermination de la valeur de E : D'après le courbe de la figure (3) , C'est une droite affine de l'expression suivante :

$$\frac{du_C}{dt} = A.u_C + B$$

Avec A est le coefficient directeur de cette droite :

$$A = \frac{0 - 30 \times 10^4}{6 - 0} = -5 \times 10^4 s^{-1}$$

et $B = 30 \times 10^4 V/s$ donc

$$\frac{du_C}{dt} = -5 \times 10^4.u_C + 30 \times 10^4$$

D'autre part d'après l'équation différentielle :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}.u_C + \frac{E}{RC}$$

donc

$$\frac{1}{RC} = 5 \times 10^4 s^{-1}$$

$\frac{E}{RC} = 30 \times 10^4 \Longrightarrow E = \frac{30 \times 10^4}{5 \times 10^4} = 6V$

$$\boxed{E = 6V}$$

Pour C ; nous avons $\frac{1}{RC} = 5 \times 10^4$ donc $C = \frac{1}{2 \times 10^3 \times 5 \times 10^4} = 10^{-8}F$

$$\boxed{C = 10nF}$$

3. Calcul de la valeur du rendement ρ :

$$\rho = \frac{E_e}{E_g} = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{CE^2} = 0,5$$

II. Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension ;

1.

1. 1. L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

Lorsqu'on ferme l'interrupteur K , il y a établissement d'un courant i(t) dans la bobine; la diode est bloquante dans ce cas .

D'après l'additivité des tension dans la maille contenant la bobine et la résistance R_1, nous avons

$$E = R_1 i + r.i + L.\frac{di}{dt}$$

$$(R_1 + r).i + L.\frac{di}{dt} = E$$

$$\frac{L}{R_1 + r}.\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_1 + r}$$

On pose $\tau = \dfrac{L}{R_1 + r}$ la constante du temps et $I_0 = \dfrac{E}{R_1 + r}$

1. 2. Détermination de la valeur de R_1

D'après la courbe de la figure (4) on $\tau = 2,5ms$ et $I_0 = 50ma$ l'intensité qui traverse le circuit en régime permanent. D'après l'équation différentielle on

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + r}$$

$$R_1 = \frac{E}{I_0} - r$$

$$R_1 = 100\Omega$$

Vérification de L

$$\tau = \frac{L}{R_1 + r}$$

$$L = \tau.(R_1 + r)$$

$$L = 0,3H$$

1. 3. Le régime permanent est établi on la tension aux borne de la bobine , d'après la loi d'additivité des tension

$$E = R_1 I_0 + U_b$$

$$U_b = E - R_1 I_0$$

$$U_b = 1V$$

2. On ouvre l'interrupteur K

2. 1. Lorsqu'on ouvre K il y a rupture de courant dans la bobine ,à t=0 l'intensité de courant n'est pas nulle et égale à $I_0 = 50mA$ et le courant électrique traverse la diode et le conducteur R_2 , la diode est passante dans ce cas .

2. 2. L'équation différentielle vérifiée par i(t)

$$u_b + R_2 i = 0$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{(R_2 + r)}{L}.I_0$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{(2 \times 10^3 + 20) \times 50 \times 10^{-3}}{0,3}$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -337A/s$$

Pour la tension U_b aux bornes de la bobine à t=0 :

$$u_b(t=0) = r.I_0 + L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$$

$$u_b(t=0) = 20 \times 50 \times 10^{-3} - 0,3 \times 337 = -100V$$

3. Le rôle de la branche contenant la diode et le conducteur ohmique est d'éviter le phénomène de surtension lors de la rupture du courant lorsqu'on ouvre K.

III. Oscillateur RLC en régime forcé .

1. La représentation de Z en fonction de N (figure 5) montre qu'elle est minimale à la résonance où $Z = R_T = R_3 + r$
graphiquement $Z = 2k\Omega$ pour une fréquence $N = 0,5kHz$, c'est la fréquence du circuit à la résonance .

2. Calcul de la capacité C_1 :
À la résonance

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2.L.N^2}$$

$$C_1 = \frac{1}{4 \times 10 \times 0,3 \times (0,5 \times 10^3)^2}$$

$$C_1 = 0,333\mu F$$

3. La relation entre Z , R_3 et r lorsque $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$
nous avons $Z = U.I$ et à la résonance $(R_3 + r) = U.I_0$ donc

$$Z = (R_3 + r).\sqrt{2}$$

Numériquement : $Z = 2,8k\Omega$ qui correspond graphiquement $N_1 = 0,2kHz$ et $N_2 = 1,25kHz$, en déduire la largeur de la bande passante à -3dB :

$$\Delta N = 1,25 - 0,2 = 1,05kHz$$

Solution .4 Mécanique

I. Étude de mouvement d'un corps solide dans l'air et dans un liquide .

1. Étude de mouvement du centre G dans l'air

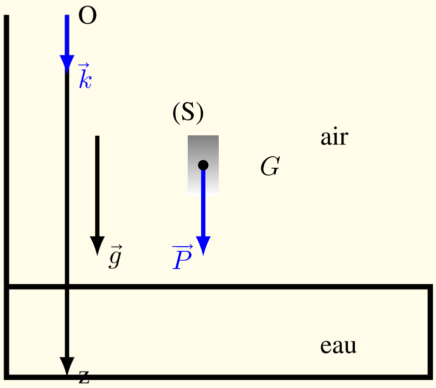
1. 1. L'équation différentielle régissant la vitesse V_z du centre d'inertie G :

Dans un référentielle terrestre considéré comme Galiléen menu d'un repère $(O, \vec{k})$, on applique la deuxième loi de Newton .

Le baigneur est en chute libre donc il est soumis seulement à son poids $\vec{P}$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$



On projette la relation vectorielle sur l'axe Oz et en tenant compte des conditions initiale : à t=0 $V_{0z} = 0$ et $z_0 = 0$

$$a_z = g$$

$$\frac{dV_z}{dt} = g$$

1. 2. L'accélération a_z est constante , le mouvement de chute est rectiligne UV et d'après l'équation différentielle on aura l'équation de vitesse

$$V_z = g.t$$

et l'équation horaire $z(t)$

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

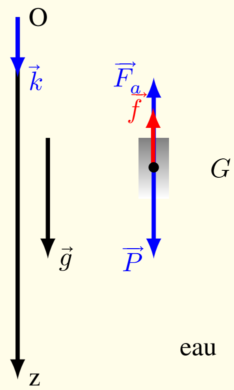
Lorsque $z = h$ on $t = t_e$ tel que $h = \frac{1}{2}gt_e^2$, c'est à dire

$$t_e = \sqrt{\frac{2.h}{g}}$$

Application numérique : $t_e = \sqrt{\frac{2 \times 10}{10}} = 1,4m/s$
En déduit la vitesse V_e d'entrée dans l'eau :

$$V_e = g.t_e$$
$$V_e = 14m/s$$

2. Étude du mouvement vertical du centre d'inertie G dans l'eau
2. 1. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse V_z du centre d'inertie G :



Dans un référentielle terrestre considéré comme Galiléen menu d'un repère $(O, \vec{k})$, on applique la deuxième loi de Newton .
Le baigneur est en chute verticale dans l'eau donc il est soumis à la forces suivantes $\vec{P}$ le poids de baigneur , la force de frottement $\vec{f}$ de l'eau et la poussée d'Archimède $\vec{F_a}$ tel que :

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{F_a} = m.\vec{a_G}$$

On projette la relation vectorielle sur l'axe Oz et en tenant compte des conditions initiale : à t=0 $V_{0z} = V_e$ et $z_0 = 0$

$$m.g - \lambda.V_z - \frac{m}{d}.g = m.\frac{dV_z}{dt}$$

$$g - \frac{\lambda}{m}.V_z - \frac{g}{d} = \frac{dV_z}{dt}$$

$$g\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{\lambda}{m}.V_z = \frac{dV_z}{dt}$$

On pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$ on aura

$$g\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{1}{\tau}.V_z = \frac{dV_z}{dt}$$

2. 2. La vitesse limite v_{lz} :

Le baigneur atteint la vitesse limite lorsque $V_z = v_{lz}$ c'est à dire que $\frac{dV_z}{dt} = 0$ donc

$$g\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{1}{\tau}.v_{lz} = 0$$

$$v_{lz} = g.\tau.\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Application numérique :

$$v_{lz} = 10.0,32.\left(1 - \frac{1}{0,9}\right) = -0,355m/s$$

2. 3. La solution de l'équation différentielle est $v_z(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$:

La solution vérifie l'équation différentielle , c'est à dire $\frac{dv_z}{dt} = -\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau}$

$$\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{B}{\tau}e^{-t/\tau} = g\left(1 - \frac{1}{d}\right)g$$

$$A = g.\tau\left(1 - \frac{1}{d}\right) = v_{lz}$$

À t=0 $v_z = V_e$, ce qui implique $V_e = v_{lz} + B$ donc

$$B = V_e - v_{lz}$$

D'où la solution :

$$v_z(t) = v_{lz} + e^{-t/\tau}\left(V_e - v_{lz}\right)$$

2. 4. L'instant t , auquel le mouvement du baigneur change de sens :
changement de sens se traduit par $v_z = 0$ c'est à dire

$$v_{lz} + e^{-t/\tau}\left(V_e - v_{lz}\right) = 0$$

$$e^{t/\tau} = \frac{v_{lz} - V_e}{v_{lz}}$$

$$t = \tau.Ln\left(1 - \frac{V_e}{v_{lz}}\right)$$

Application numérique :

$$t = 0,32Ln\left(1 + \frac{14}{0,355}\right) = 1,2s$$

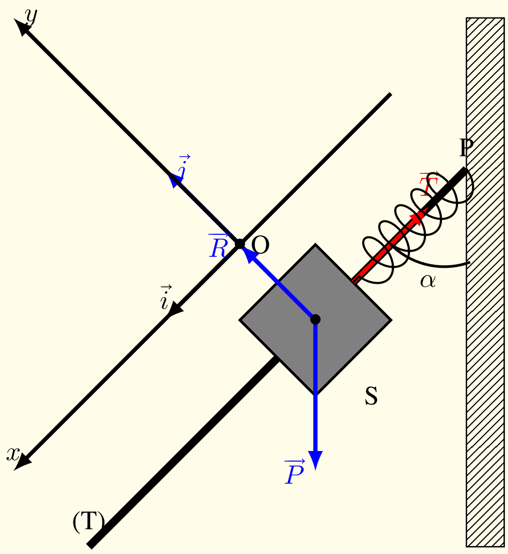
II. Étude de mouvement d'un pendule élastique ;

1. Expression de l_e la longueur du ressort à l'équilibre :

Bilan des forces extérieures qui agissent sur le solide :
* Poids du solide : $\overrightarrow{P}$
* la réaction de la tige $\overrightarrow{R}$
* la tension du ressort : $\overrightarrow{T}$

À l'équilibre du système on a

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = \vec{0}$$



On projette la relation vectorielle sur Ox , on aura :

$$mgcos(\alpha) - T = 0$$

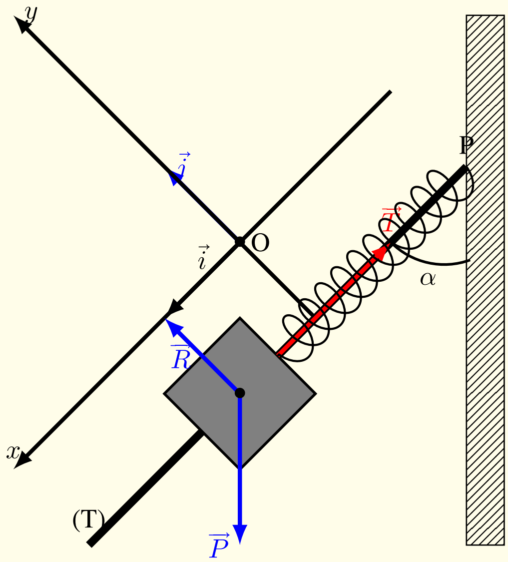
sachant que $T = K.(l_e - l_0)$, nous obtenons

$$mgcos(\alpha) - K.(l_e - l_0) = 0$$

$$l_e = l_0 + \frac{mgcos(\alpha)}{K}$$

2.

2. 1. L'équation différentielle vérifiée par $x(t)$



Bilan des forces extérieures qui agissent sur le solide :
* Poids du solide : $\overrightarrow{P}$
* la réaction de la tige $\overrightarrow{R}$
* la tension du ressort : $\overrightarrow{T}$

On appliquant la deuxième loi de Newton

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a_G}$$

On projette la relation vectorielle sur Ox , on aura :

$$mgcos(\alpha) - T = ma_x$$

sachant que $T = K.(l_e - l_0 + x)$, nous obtenons

$$mgcos(\alpha) - K.(l_e - l_0 + x) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

À l'équilibre on a $mgcos(\alpha) - K.(l_e - l_0) = 0$ donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

2. 2. L'expression de $x(t)$

On cherche l'amplitude x_m d'après les conditions initiale du mouvement :
à t=0 d'après le graphe $a_x = f(x)$ on constate le mouvement de (s) est défini dans $-x_m = 1,5 \times 10^{-2}m$ et $x_m = 1,5 \times 10^{-2}m$ donc l'amplitude du mouvement est $x_m = 1,5 \times 10^{-2}m$

La période T_0

$a_x = f(x)$ est une droite linéaire de la forme $a_x = A.x$ avec A est le coefficient directeur de cette droite .

$$A = \frac{0 - 3 \times 1,25}{0 + 3 \times 0,5 \times 10^{-2}} = -250s^{-2}$$

et d'après l'équation différentielle on a $a_x = -\dfrac{K}{m}x = -\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$

$$T_0 = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{1}{250}} = 0,4s$$

Le déphasage ϕ :

À t=0 $x = x_m = x_m cos(\phi)$ donc $cos(\phi) = 1$

$$\phi = 0$$

d'où l'expression de x(t) :

$$x(t) = 1,5 \times 10^{-2} cos(5.\pi.t)$$

3.

3. 1. L'expression de l'énergie potentielle E_p de l'oscillateur :

* L'énergie potentielle de pesanteur ;

$$E_{pp} = mg(z - z_{ref}$$

On choisit comme état de référence $E_{pp} = 0$ le plan horizontal contenant G comme l'origine de l'axe Oz orienté vers le haut donc $z_{ref} = 0$

$$E_{pp} = mgz$$

avec $z = -xcos(\alpha)$ donc

$$E_{pp} = -mgxcos(\alpha)$$

* Énergie potentielle élastique ;

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.\Delta l^2 + C$$

avec Δl à chaque instant est égal $\Delta l_{eq} + x$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.(\Delta l_{eq} + x)^2 + C$$

On choisit comme état de référence $E_{pe} = 0$ i.e $x = 0$ l'état où le ressort est allongé à l'équilibre , c'est à dire $E_{pe} = 0$ lorsque $\Delta l = \Delta l_{eq}$ et $C = -\dfrac{1}{2}K\Delta l_{eq}^2$. donc

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.\Delta l_e^2 + K.\Delta l_{eq}.x + \frac{1}{2}K.x^2 - \frac{1}{2}K\Delta l_{eq}^2$$

$$E_{pe} = K.\Delta l_{eq}.x + \frac{1}{2}K.x^2$$

donc l'énergie potentielle de l'oscillateur est :

$$E_p = -mgxcos(\alpha) + K.\Delta l_{eq}.x + \frac{1}{2}K.x^2$$

$$E_p = x\underbrace{(K.\Delta l_{eq} - mgcos(\alpha))}_{0} + \frac{1}{2}K.x^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}K.x^2$$

3. 2. Détermination de la valeur du raideur K :
l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ d'après la question précédente :

$$E_m = E_c + \frac{1}{2}K.x^2$$

$$E_c = E_m - \frac{1}{2}K.x^2$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c(max) = 9 \times 10^{-3}J$ et égale aussi à $\frac{1}{2}K.x_m^2$ c'est à dire

$$9 \times 10^{-3} = \frac{1}{2}K.x_m^2$$

$$K = \frac{2 \times 9 \times 10^{-3}}{x_m^2}$$

$$K = \frac{2 \times 9 \times 10^{-3}}{(1.5 \times 10^{-2})^2} = 80N/m$$

Détermination de la masse m du solide S :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$m = \frac{K.T_0^2}{4\pi^2}$$

$$m = \frac{80 \times (0,4)^2}{40} = 0,32kg$$

Corrigé par Allal MAHDADE